MÈTODOS EN DIFERENCIAS PARA LAS ECUACIONES ELÍPTICAS

A.A.Samarski, V.B.Andréiev


ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИР

А. А. САМАРСКИЙ, В. Б АНДРЕЕВ

РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА» МОСКВА

MÉTODOS EN DIFERENCIAS PARA LAS ECUACIONES ELÍPTICAS

A. A. SAMARSKI, V. B. ANDRÉIEV

EDITORIAL MIR
MOSCÚ

Traducido del ruso por T. Loshakova
Impreso en la URSS, 1979

На испанском языке

INDICE

PREFACIO

Muchos procesos a ciclo fijo de distinta naturaleza física conducen a las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de tipo elíptico. Es suficiente señalar los problemas estacionarios sobre la conductibilidad térmica y la difusión, el problema acerca de la distribución de la corriente en el medio conductor, los problemas de la electrostática y la magnetostática, los problemas sobre la teoría de elasticidad, la teoría de la filtración, etc.

Las soluciones exactas de los problemas de contorno se consiguen para las ecuaciones elípticas sólo en casos particulares. Por lo tanto es necesario saber solucionar estos problemas aproximadamente.

Método universal y eficaz de la solución de ecuaciones elípticas es el método en diferencias finitas, al cual está dedicado dicho libro.

El proceso de la resolución de ecuaciones diferenciales con auxilio del método en diferencias consta de dos etapas principales:

1) la primera etapa es la sustitución de la ecuación diferencial y las condiciones complementarias (por ejemplo, las condiciones de contorno) por el sistema de ecuaciones definidas sobre la red (la construcción del esquema en diferencias);

2) la segunda etapa es la resolución del sistema obtenido de ecuaciones definidas sobre la red (en diferencias).

En el presente libro se examinan sólo las cuestiones relacionadas con la construcción y la investigación de los esquemas en diferencias. Los métodos (directos e iterativos) de resolución de las ecuaciones en diferencias las cuales aproximan ecuaciones elípticas, se estudiarán en un libro especial.

En éste gran atención se presta a la construcción de las aproximaciones en diferencias de ecuaciones y condiciones complementarias para los problemas tipo de la Física matemática. Nos limitamos sólo al estudio de los problemas referidos a las ecuaciones y los sistemas de ecuaciones del segundo y del cuarto órdenes destacando de manera especial aquellos que tienen aplicación inmediata en la práctica. Con este respecto hemos considerado oportuno exponer los planteamientos de una serie de problemas de la física matemática (cap. I) abasteciéndolos de las deducciones de ecuaciones y condiciones de frontera.

Señalamos que las aproximaciones en diferencias de ecuaciones elípticas se pueden utilizar al construir los esquemas en diferencias para los problemas no estacionarios de la física matemática relacionados con las ecuaciones de tipo parabólico e hiperbólico.

Con el fin de simplificar la exposición, en el libro dado se examinan principalmente los esquemas de resolución de las ecuaciones con dos variables independientes. El paso al caso de tres dimensiones no ocasiona ningunas dificultades de principio y sólo conduce a fórmulas más voluminosas.

Al escribir los esquemas en diferencias siempre se debe tener presente aquel trabajo de cálculo que será preciso cumplir para la resolución de los sistemas obtenidos de ecuaciones en diferencias. Por eso nos restringimos al estudio de los esquemas elementales con el modelo mínimo en el cual se asegura el segundo (o cuarto) orden de precisión. Precisamente los esquemas de este tipo se emplean vastamente en la práctica.

Al construir esquemas en diferencias se debe preocupar no sólo por que aproximen de manera suficiente el problema inicial para la ecuación diferencial desde el punto de vista del error de aproximación, sino por que modelen en el espacio de funciones definidas sobre la red las propiedades fundamentales del problema inicial (tales, por ejemplo, como la autoconjugación, la elipticidad, etc.). En el libro a esta cuestión se le otorga debida atención.

En el tiempo presente existen bastantes métodos de construcción de aproximaciones en diferencias para los problemas elípticos. La exposición pormenorizada de estos métodos en forma general no es posible en los marcos del trabajo en cuestión.

Diversos métodos de construcción de los esquemas en diferencias se muestran mediante los ejemplos más sencillos de los problemas unidimensionales. Este enfoque permite distinguir la idea constructiva de uno u otro método sin recargar la exposición de los detalles técnicos muy complicados, los cuales aparecen al examinar las ecuaciones suficientemente generales.

La cualidad de un esquema en diferencias se aprecia ante todo por su exactitud. El estudio de los esquemas en diferencias en el libro está basado en la investigación detallada de su error de aproximación y su estabilidad puesto que precisamente estas características definen la exactitud del esquema.

El estudio de la estabilidad de los esquemas en diferencias se reduce a la obtención de las acotaciones apriorísticas para las soluciones de problemas en diferencias de contorno. Para los esquemas en diferencias correspondientes a las ecuaciones elípticas se conocen muchas acotaciones apriorísticas diferentes que imitan en uno u otro grado las acotaciones apriorísticas que se emplean para las ecuaciones diferenciales.

En el libro las acotaciones apriorísticas tienen en grado considerable el carácter ilustrativo. Ellas no se aportan para todos los esquemas en diferencias citados en el libro. Sin embargo, los métodos expuestos en los capítulos III, V y VI permiten obtener estas acotaciones.

Hemos estudiado con más detalle los esquemas en diferencias para las ecuaciones de Poisson en diferentes sistemas de coordenadas (cap. III).

En el capítulo IV se han examinado los esquemas en diferencias de los problemas de contorno fundamentales para el caso de ecuaciones elípticas del segundo orden (con derivadas mixtas y sin ellas, de orden elevado, los esquemas sobre las redes irregulares, etc.), del sistema de las ecuaciones de la teoría de la elasticidad, así como de las ecuaciones del cuarto orden.

Se estudian detalladamente las aproximaciones de las condiciones de conjugación y de las condiciones de frontera de todo género para las ecuaciones del segundo y del cuatro órdenes.

En el capítulo V se introduce el aparato matemático mínimo de la teoría de los esquemas en diferencias (las fórmulas en diferencias de Green, los problemas sobre los valores propios para los operadores diferenciales, los teoremas de encaje sobre la red, etc.) el cual se emplea en el capítulo VI para obtener según el método de desigualdades energéticas algunas acotaciones apriorísticas.

Los métodos de construcción de los esquemas en diferencias, expuestos en este libro, se pueden usar asimismo para obtener las aproximaciones en diferencias de las ecuaciones no lineales. No obstante los esquemas no lineales no se examinan en el libro, ya que el estudio de éstos exigiría prestar mucha más atención a la obtención de las acotaciones apriorísticas, lo que sería inconveniente en dicho libro.

Este libro se fundamentó en el curso de conferencias pronunciadas por los autores durante muchos años en la Universidad de Moscú para los estudiantes de las facultades mecánico-matemática, física, de matemática calculadora y cibernética. El libro está destinado para gran círculo de lectores y puede ser utilizado como material didáctico al estudiar los métodos en diferencias de resolución de las ecuaciones de física matemática. La exposición tiene el carácter sistemático y elemental y no presupone la preparación previa del lector en la teoría de esquemas en diferencias. Es de señalar la afinidad ideológica y metódica de esta obra con el libro de A. A. Samarski «Introducción a la teoría de esquemas en diferencias» («Ciencia», Moscú, 1971).

Los autores

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

§ 1. Ejemplos de los problemas científico-técnicos que conducen a las ecuaciones elípticas

1. Problemas estacionarios sobre la conductibilidad térmica y la difusión. Los procesos estacionarios (es decir, aquellos que no cambian con el tiempo) de diversa naturaleza física se describen por las ecuaciones de tipo elíptico, en el caso más sencillo (del medio homogéneo y la ausencia de las fuentes), por la ecuación de Laplace. Señalemos, por ejemplo, los problemas sobre la conductibilidad térmica, la difusión, la electrostática, la magnetostática, el flujo potencial del líquido, etc.

Examinemos el problema sobre la distribución estacionaria del calor en cierto volumen G con una superficie Γ del espacio tridimensional $x = (x_1, x_2, x_3)$. El proceso de transferencia de calor (o de la conductibilidad térmica) se determina por la ley de Fourier: el vector de densidad de un flujo calorífico W es proporcional al gradiente de temperatura $u = u(x)$, así que

$$W = -k \operatorname{grad} u, \tag{1}$$

donde $k = k(x)$ es el *coeficiente de conductibilidad térmica*. La densidad del flujo calorífico es igual a la cantidad de calor que pasa en la unidad de tiempo a través de la unidad de superficie isotérmica.

Escribamos la ecuación de balance térmico para cierto volumen V que enteramente está dentro de G y que tiene la superficie S. Sea que dentro del volumen V existen fuentes de calor distribuidos con la densidad $f(x)$, así que $f(x)\,dV$ es la cantidad de calor desprendida en el volumen dV.

Sea W_n la proyección del vector W sobre la normal exterior n a la superficie S. La *ecuación de balance* térmico expresa un hecho evidente: el flujo calorífico sumario que pasa a través de la superficie S

$$\iint_S W_n \, ds$$

debe ser igual a la cantidad de calor

$$\iiint_V f(x)\,dV$$

desprendida en el volumen V, es decir,

$$\iint_S W_n\,dS = \iiint_V f(x)\,dV. \tag{2}$$

Hagamos uso de la fórmula de Ostrogradsky

$$\iint_S W_n\,dS = \iiint_V \operatorname{div} \boldsymbol{W}\,dV$$

y volvamos a escribir la ecuación de balance (2) en la forma

$$\iiint_V (\operatorname{div} \boldsymbol{W} - f(x))\,dV = 0. \tag{2'}$$

Si $f(x)$ y $\operatorname{div} \boldsymbol{W}$ son funciones continuas del punto $x = (x_1, x_2, x_3)$, en virtud de que el volumen V es arbitrario, de (2') se deduce:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{W} = f(x). \tag{3}$$

Sustituyendo en ésta la expresión (1) del vector de flujo calorífico $\boldsymbol{W}$, obtenemos la ecuación para la temperatura estacionaria $u = u(x)$

$$Lu = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) = -f(x), \tag{4}$$

o en la forma desarrollada

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(k\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(k\frac{\partial u}{\partial x_3}\right) = -f(x_1, x_2, x_3). \tag{4'}$$

El coeficiente k es la función del punto $x = (x_1, x_2, x_3)$:

$$k = k(x) = k(x_1, x_2, x_3).$$

En el caso de un medio homogéneo el coeficiente de conductibilidad térmica $k = \text{const}$ no depende del punto x y la distribución estacionaria de temperatura $u = u(x)$ se describe por la ecuación de Poisson

$$\Delta u = -\bar{f}(x), \quad \bar{f} = f/k.$$

Sería más cómodo conservar para el segundo miembro la designación $f(x)$ y escribir

$$\Delta u = -f(x), \tag{5}$$

o en la forma desarrollada:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = -f(x). \tag{5'}$$

Si no hay fuentes de calor, es decir $f(x) \equiv 0$, obtenemos para la temperatura estacionaria $u = u(x)$ una ecuación homogénea

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) = 0$$

(o la ecuación de Laplace $\Delta u = 0$ en caso de que $k = \text{const}$).

La ecuación de la conductibilidad térmica (4) se ha obtenido suponiendo que el proceso de transferencia de calor es isótropo. Si el factor de conductibilidad térmica depende de la dirección y es tensor (el medio es anisótropo), en vez de (4) se obtiene la ecuación

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right) = -f(x). \qquad (6)$$

Si $k_{\alpha\beta} \equiv 0$, siendo $\alpha \neq \beta$, la ecuación (6) toma la forma

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_{11}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_{22}\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(k_{33}\frac{\partial u}{\partial x_3}\right) = -f.$$

La ecuación (4) se cumple para todos los puntos interiores del recinto G. En su frontera Γ se dan las condiciones complementarias.

Generalmente se da una de las siguientes condiciones:

a) se da la temperatura: $u = g(x)$, siendo $x \in \Gamma$;

b) se indica el flujo calorífico: $k\ \frac{\partial u}{\partial n} = g(x)$ con $x \in \Gamma$;

c) se preestablece el *intercambio de calor según la ley de Newton*: $k\frac{\partial u}{\partial n} = \varkappa u + g(x)$, $x \in \Gamma$, donde $\varkappa = \varkappa(x) > 0$.

En concordancia con esto obtenemos tres problemas de contorno fundamentales:

a) el primer problema de contorno, o el problema de Dirichlet: hallar la función $u(x)$ continua en un recinto cerrado $G + \Gamma$ partiendo de las condiciones

$$Lu = -f(x), \text{ siendo } x \in G; \ u = g(x), \text{ siendo } x \in \Gamma;$$

b) el segundo problema de contorno, o el problema de Neumann:

$$Lu = -f(x), \quad \text{siendo} \quad x \in G; \quad k\frac{\partial u}{\partial n} = g(x), \quad \text{siendo} \quad x \in \Gamma;$$

c) el tercer problema de contorno:

$$Lu = -f(x), \quad \text{siendo} \quad x \in G; \quad k\frac{\partial u}{\partial n} = \varkappa u + g(x), \quad \text{siendo} \quad x \in \Gamma.$$

Señalemos que para resolver el problema de Neumann es preciso cumplir la condición

$$\int_\Gamma g(x)\, d\sigma + \int_G f(x)\, dx = 0. \qquad (7)$$

la cual en el caso de ecuación homogénea ($f \equiv 0$) tiene la forma

$$\int_{\Gamma} g(x)\, d\sigma = 0. \tag{8}$$

Esta condición significa que la cantidad de calor que entra en el recinto G debe ser igual a la cantidad de calor que sale (en el caso contrario el proceso tendrá el carácter no estacionario).

Los procesos de difusión de la sustancia son en mucho análogos a los procesos de conductibilidad térmica. Al describir la difusión, la ley fundamental de conductibilidad térmica tiene como análogo la *ley de Nernst*, de acuerdo con la cual el vector de densidad del flujo de sustancia W es proporcional al gradiente de concentración $u = u(x)$:

$$W = -D \text{ grad } u,$$

donde $D = D(x)$ es el factor de difusión. Sustituyendo esta expresión en la ecuación (3), con $f(x) = 0$ (lo que significa la ausencia de fuentes de sustancia difusora), obtenemos la ecuación de difusión

$$\text{div}(D \text{ grad } u) = 0,$$

la cual en el caso de un medio homogéneo ($D = \text{const}$) se convierte en la ecuación de Laplace $\Delta u = 0$.

Si el medio en el que tiene lugar la difusión, se mueve con la velocidad $v = (v_1, v_2, v_3)$, para la distribución estacionaria de la concentración $u = u(x)$ la ecuación de difusión tiene la forma

$$\text{div}(D \text{ grad } u) - \text{div}(vu) = 0 \tag{9}$$

ó

$$\text{div}(D \text{ grad } u) - v_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} - v_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} - v_3 \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0,$$

si $\text{div } v = 0$ (el medio es incompresible). En efecto, si el medio se mueve, el flujo sumario de sustancia consta del flujo difusivo, igual a $-D \text{ grad } u$, y del flujo de transferencia (o de traslación), el cual es igual a uv, así que el flujo sumario es igual a

$$W = -D \text{ grad } u + uv.$$

Ahora nos queda sustituir esta expresión en (3), siendo $f \equiv 0$ (no hay fuentes). En el proceso de difusión puede tener lugar una reacción de descomposición o multiplicación de dicha sustancia, lo que provoca la aparición de las afluencias o fuentes, respectivamente. Si la densidad de estas fuentes (afluentes), digamos, es proporcional a la concentración, en vez de (9) obtendremos la ecuación

$$\text{div}(D \text{ grad } u) - (v \text{ grad } u) + \beta u = 0, \tag{10}$$

donde β es el factor de proporcionalidad (siendo $\beta > 0$, tenemos una fuente (la multiplicación de la sustancia); con $\beta < 0$, una afluencia).

OBSERVACIÓN 1. A las ecuaciones de especie arriba indicada conducen otros problemas. Examinemos como ejemplo el problema sobre el campo electrostático que se encuentra en un medio no conductor. Este se describe por las ecuaciones de Maxwell

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{D} = 4\pi\rho, \ \boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E},$$

donde $\boldsymbol{E}$ es el vector de la intensidad de campo eléctrico, $\boldsymbol{D}$ es el vector de inducción eléctrica, $\varepsilon = \varepsilon(x)$ es la constante dieléctrica del medio, $\rho = \rho(x)$ es la densidad de cargas volumétrica en el punto $x = (x_1, x_2, x_3)$. De la ecuación $\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0$ se deduce que $\boldsymbol{E}$ es el vector potencial que se representa en la forma

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} u,$$

donde $u = u(x)$ es el potencial del campo. Sustituyendo $\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} u$ en la ecuación $\operatorname{div} \varepsilon \boldsymbol{E} = 4\pi\rho$, obtenemos

$$\operatorname{div} (\varepsilon \operatorname{grad} u) = -4\pi\rho.$$

Si el medio es homogéneo ($\varepsilon = \text{const}$),

$$\Delta u = -4\pi\rho/\varepsilon;$$

para el vacío ($\varepsilon = 1$) tendremos $\Delta u = -4\pi\rho$.

Si el problema es estacionario, de las ecuaciones de Maxwell obtenemos para el vector de intensidad de campo magnético (las ecuaciones de la magnetostática)

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = 0, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0, \quad \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$$

Por analogía a la Electrostática introducimos el potencial u de campo magnético el cual, siendo el medio homogéneo ($\mu = \text{const}$), satisface la ecuación de Laplace $\Delta u = 0$, con esto $\boldsymbol{H} = -\operatorname{grad} u$.

OBSERVACIÓN 2. El potencial de velocidad φ del flujo estacionario de líquido incompresible también satisface la ecuación de Laplace $\Delta\varphi = 0$, además, la velocidad $\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} \varphi$.

Si la resolución de la ecuación (4) no depende de x_3 (lo que evidentemente puede tener lugar en el caso de $f = f(x_1, x_2)$, $k = k(x_1, x_2)$, de las condiciones de contorno independientes de x_3 y en el caso de las regiones especiales), obtenemos para la determinación de $u = u(x_1, x_2)$ una ecuación bidimensional

$$Lu = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(k(x_1, x_2)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(k(x_1, x_2)\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) = -f(x_1, x_2).$$

Por ejemplo, esto puede tener lugar en el caso de una región cilíndrica infinita con la generatriz dirigida a lo largo de x_3 a condición de que a lo largo de la generatriz no cambian los datos de entrada, a saber: los coeficientes y los segundos miembros de la ecuación y de

las condiciones de contorno. Entonces, el problema se puede considerar en cualquier sección transversal del cilindro paralela al plano (x_1, x_2).

En lo sucesivo para simplificar la exposición examinamos sólo los problemas bidimensionales. El paso a los problemas elípticos tridimensionales no acarrea dificultades de principio, pero complica, como regla general, los cálculos y fórmulas.

2. Problemas sobre la distribución estacionaria de la densidad de la corriente en el medio conductor. A las ecuaciones de tipo elíptico conducen los problemas sobre la distribución estacionaria de los campos eléctrico y magnético. Estos problemas se describen con el sistema de ecuaciones de Maxwell, las cuales en el caso estacionario tienen la forma

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c} \boldsymbol{j}, \qquad \operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0,$$
$$\operatorname{div} \mu \boldsymbol{H} = 0, \qquad \operatorname{div} \varepsilon \boldsymbol{E} = 4\pi\rho, \tag{11}$$

donde $\boldsymbol{E}$ es el vector de intensidad del campo eléctrico; $\boldsymbol{H}$, el vector de intensidad del campo magnético; $\boldsymbol{j}$, el vector de densidad volumétrica de la corriente eléctrica; ρ, la densidad volumétrica de las cargas eléctricas; μ, el coeficiente de permeabilidad magnética y ε, el coeficiente de permitividad dieléctrica.

En el caso general de un medio anisótropo y no homogéneo ε y μ son los tensores dependientes del punto $x = (x_1, x_2, x_3)$ del espacio. Si el medio es isótropo. ε y μ son funciones escalares de x. En el caso de un medio homogéneo e isótropo ε y μ son constantes: $\varepsilon = \text{const} > 0$, $\mu = \text{const} > 0$. Para un dieléctrico se puede considerar $\mu = 1$; para un conductor, $\varepsilon = 1$; para el vacío, $\varepsilon = \mu = 1$.

En el caso general en vez de $\boldsymbol{j}$ en la ecuación (11) se contiene la suma $\boldsymbol{j} + \boldsymbol{j}^{(e)}$, donde $\boldsymbol{j}^{(e)}$ es el vector de densidad volumétrica de la corriente procedente de las f.e.m. exteriores. Aquí consideramos que $\boldsymbol{j}^{(e)} = 0$. Si el medio no es conductor, $\boldsymbol{j} = 0$. Las ecuaciones de la Magnetostática ($\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = 0$, $\operatorname{div} \mu\boldsymbol{H} = 0$) son válidas también para el medio no conductor.

Como se ha señalado arriba, la condición $\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0$ significa que el vector $\boldsymbol{E}$ es potencial a la vez que la condición $\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0$, la cual tiene lugar siendo $\mu = \text{const}$, significa que el vector $\boldsymbol{H}$ es solenoidal, es decir, existe un potencial vectorial A tal que $H = \operatorname{rot} A$, $\operatorname{div} A = 0$. El vector A satisface la ecuación de Poisson $\Delta A = (-4\pi/c)\, \boldsymbol{j}$. En efecto, la primera ecuación de (11) nos da

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} A = \operatorname{grad} \operatorname{div} A - \Delta A = -\Delta A = -(4\pi/c)\, \boldsymbol{j}.$$

Problemas interesantes surgen en relación al estudio de la distribución estacionaria de la corriente en el medio conductor. De las ecuaciones de Maxwell (11) se sigue la ley de conservación de la

carga eléctrica

$$\operatorname{div} \boldsymbol{j} = 0,$$

a la cual se debe añadir la condición de potencialidad de un campo eléctrico, es decir, la fórmula

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} u. \tag{12}$$

Entre los vectores de densidad de corriente $\boldsymbol{j}$ y de densidad de campo eléctrico existe una relación. Esta relación se expresa por la *ley de Ohm*

$$\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}, \tag{13}$$

donde σ es el coeficiente de electroconductibilidad, el cual es una función escalar de $x = (x_1, x_2, x_3)$, si la conductibilidad del medio no depende de la dirección (el medio es isótropo en conductibilidad); en el caso contrario σ es un tensor. De las dos últimas fórmulas se deduce: $\boldsymbol{j} = -\sigma \operatorname{grad} u$. De aquí y de la fórmula $\operatorname{div} \boldsymbol{j} = 0$ también obtenemos la ecuación de potencial: $\operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} u) = 0$, la cual en la forma desarrollada se escribe de la siguiente manera:

$$\sum_{i,\,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sigma_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = 0 \quad \text{para un medio anisótropo,}$$

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sigma \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = 0 \quad \text{para un medio isotrópo,}$$

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0 \quad \text{para un medio homogéneo e isótropo.}$$

En la superficie conductora la componente tangencial del vector de campo eléctrico es igual a cero, lo que equivale a la constancia del potencial: $u =$ const (la condición de contorno del primer género). En particular, en la superficie perfectamente conductora puesta a tierra $u \equiv 0$. En la frontera entre el conductor y el dieléctrico es igual a cero la componente normal de la densidad de corriente eléctrica, a saber $j_n = -\sigma \frac{\partial u}{\partial n}$, es decir,

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ (la condición de contorno del segundo género).}$$

Al estudiar las corrientes de líquidos y gases en los canales magnetohidrodinámicos, al investigar el comportamiento del plasma en desequilibrio en los campos magnéticos intensos, etc., se encuentran en número reducido los problemas estacionarios de la electrodinámica, cuyo rasgo distintivo es la ley generalizada de Ohm, la cual expresa

la dependencia del vector j no sólo con respecto a E, sino también con respecto a H. Indiquemos ante todo que para el medio que se mueve con una velocidad v la ley de Ohm (13) toma la forma

$$j = \sigma (E + [vH]). \tag{14}$$

Si el medio se mueve con una velocidad v y se tiene en cuenta el llamado efecto Hall, tiene lugar la ley generalizada de Ohm

$$j + [j\Omega] = \sigma (E + [vH]), \quad \Omega = \beta \frac{H}{|H|}, \tag{15}$$

donde β es el parámetro de Hall y $\sigma > 0$, el coeficiente de electroconductibilidad.

Si el parámetro de Hall $\beta = 0$, esta ecuación para j se transforma en la expresión de la ley común de Ohm para el medio en movimiento.

La suposición de que las corrientes de desplazamiento y los campos magnéticos inducidos son ínfimamente pequeños permite considerar el campo magnético como constante y preestablecido.

Consideraremos indicadas las distribuciones espaciales de conductibilidad σ, de parámetro de Hall β y de velocidad del medio v. En el caso general estas magnitudes se hallan como resultado de la resolución de otras ecuaciones, por ejemplo, de las ecuaciones de la dinámica magnética de los gases, de la ley de conservación de la energía de los electrones, etc.

En adelante nos limitaremos al estudio del problema bidimensional suponiendo que los vectores j, E y v no dependen de la coordenada x_3 y se encuentran en un plano (x_1, x_2), así que

$$j = (j_1, j_2, 0), \quad E = (E_1, E_2, 0), \quad v = (v_1, v_2, 0),$$

mientras que el campo magnético H y el vector Ω son perpendiculares al plano (x_1, x_2):

$$H = (0, 0, H), \quad \Omega = (0, 0, \Omega).$$

Todas las funciones, a saber j_1, j_2, E_1, E_2, v_1, v_2, H y Ω, dependen únicamente de x_1 y x_2. En este caso las ecuaciones rot $E = 0$, div $j = 0$ y la ley de Ohm (15) tienen la forma

$$\begin{gathered} \frac{\partial E_1}{\partial x_2} - \frac{\partial E_2}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial j_1}{\partial x_1} + \frac{\partial j_2}{\partial x_2} = 0, \\ j_1 + \Omega j_2 = \sigma (E_1 + v_2 H), \quad j_2 - \Omega j_1 = \sigma (E_2 - v_1 H). \end{gathered} \tag{16}$$

Aquí se han escrito cuatro ecuaciones respecto a cuatro funciones desconocidas E_1, E_2, j_1 y j_2; las funciones v_1, v_2, H, Ω y σ están preestablecidas.

Examinemos estas ecuaciones en un recinto finito G con la frontera Γ. En la curva Γ se deben indicar las condiciones de contorno. Analicemos las siguientes condiciones de contorno.

a) Está dada la componente normal del vector de densidad de la corriente eléctrica que pasa por la frontera:

$$j_n = g(s) \text{ en } \Gamma,$$

donde $g(s)$ es la función indicada de la longitud del arco s medida a partir de cierto punto de la curva Γ, j_n es la proyección del vector j sobre la normal exterior n a la curva Γ.

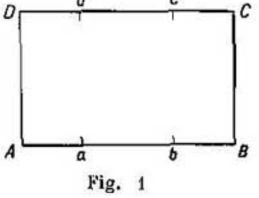


Fig. 1

El caso de $g(s) \equiv 0$ corresponde a un dieléctrico perfecto; el caso de $g(s) \neq 0$, a un electrodo «perfectamente seccionado».

b) Otro tipo de la condición de contorno consiste en la exigencia de la continuidad de la componente tangencial E_τ del vector de campo eléctrico en la superficie de separación de dos medios. Así, a lo largo del electrodo continuo perfectamente conductor la componente tangencial del campo eléctrico es igual a cero:

$$E_\tau = 0.$$

En el caso general la frontera Γ está dividida en un número finito de las parcelas γ_k en las cuales están dadas las condiciones de contorno de tipo diferente.

En lo sucesivo supongamos que G es un rectángulo $ABCD$. De frontera del recinto Γ sirven las paredes perfectamente dieléctricas, excepto dos electrodos $ab \subset AB$ y $cd \subset CD$, los cuales son bien perfectamente seccionados ($j_n \neq 0$), bien perfectamente conductores ($E_\tau = 0$). De las ecuaciones (16) se deduce que es posible introducir una función escalar $\varphi(x_1, x_2)$ y admitir

$$E = -\operatorname{grad}\varphi \quad \text{ó} \quad E_1 = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \quad E_2 = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_2},$$

también se puede introducir una función vectorial (potencial vectorial) $\Psi = (0, 0, \psi(x_1, x_2))$ y admitir

$$j = \operatorname{rot}\psi \quad \text{ó} \quad j_1 = \frac{\partial\psi}{\partial x_2}, \quad j_2 = -\frac{\partial\psi}{\partial x_1}.$$

Sustituyendo estas expresiones en la ley de Ohm (15), obtendremos

$$\begin{aligned} &\Omega\frac{\partial\psi}{\partial x_1} - \frac{\partial\psi}{\partial x_2} - \sigma\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} = -\sigma v_2 H, \\ &\frac{\partial\psi}{\partial x_1} + \Omega\frac{\partial\psi}{\partial x_2} - \sigma\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} = \sigma v_1 H. \end{aligned} \qquad (17)$$

La condición de frontera $j_n = g(s)$ toma la forma

$$\frac{\partial\psi}{\partial s} = g(s)$$

y es equivalente a la condición

$$\psi(x)|_{x\in\Gamma} = \nu(s) = \int g(s)\,ds. \tag{18}$$

En vez de $E_\tau = 0$ obtenemos $\partial\varphi/\partial s = 0$, de donde se deduce:

$$\varphi(x)|_{x\in\Gamma} = \text{const}.$$

Eliminando φ no es difícil reducir el sistema de dos ecuaciones del primer orden para las funciones ψ y φ a una ecuación del segundo orden para la función ψ:

$$L\psi = -\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{\sigma}\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{\sigma}\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right) - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\Omega}{\sigma}\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\Omega}{\sigma}\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right) = f,$$

$$f = \frac{\partial}{\partial x_1}(v_1H) + \frac{\partial}{\partial x_2}(v_2H) = \text{div}\,(H\boldsymbol{v}).$$

Para ello es suficiente multiplicar las ecuaciones (17) por $1/\sigma$, diferenciar la primera ecuación respecto a x_2 y la segunda, respecto a x_1, luego de la primera igualdad restar la segunda.

La condición de contorno $\psi(s) = \nu(s)$ queda válida, pero la condición $\varphi(s) = \text{const}$, en virtud de las ecuaciones (17) y (18), se convierte en una condición con derivada oblicua

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} + \Omega\frac{\partial\psi}{\partial s} = \sigma v_n H. \tag{19}$$

En efecto sean $\boldsymbol{n} = (\cos\alpha, \text{sen}\,\alpha)$ el vector unitario de la normal exterior y $\boldsymbol{\tau} = (-\text{sen}\,\alpha, \cos\alpha)$, el vector unitario tangente a la curva Γ. Anotemos inicialmente que $v_n = v_1\cos\alpha + v_2\,\text{sen}\,\alpha$,

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\cos\alpha + \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\,\text{sen}\,\alpha, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial s} = -\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\,\text{sen}\,\alpha + \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\cos\alpha.$$

Luego multipliquemos la ecuación (17) por $-\,\text{sen}\,\alpha$ y la ecuación (18) por $\cos\alpha$, después sumamos las ecuaciones obtenidas:

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} + \Omega\frac{\partial\psi}{\partial s} - \sigma\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \sigma v_n H.$$

De aquí se desprende la condición (19), suponiendo que $\varphi(s) = \text{const}$ ó $\partial\varphi/\partial s = 0$. Si los parámetros σ y Ω son constantes, la ecuación $L\psi = f$ se transforma en la ecuación de Poisson

$$\Delta\psi = -\sigma f.$$

De esta forma, tenemos el siguiente problema de contorno:

$$L\psi = f \qquad \text{siendo } x = (x_1, x_2) \in G,$$
$$\psi(s) = \nu(s) \qquad \text{en } \gamma_1 \tag{19'}$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial n} + \Omega\frac{\partial\psi}{\partial s} = \sigma v_n H \quad \text{en } \gamma_2,$$

con todo esto $\gamma_1 + \gamma_2 = \Gamma$.

Examinemos la clase Ψ de las funciones ψ que satisfacen las condiciones homogéneas (18) ó (19) ó (19').

El operador L, determinado más arriba, cuando se emplea en la clase Ψ de las funciones ψ es positivo:

$$(\psi, L\psi) = \iint \psi L\psi \, dx_1 \, dx_2 > 0$$

y, hablando en general, no autoconjugado, $L \neq L^*$, es decir,

$$(\psi, L\overline{\psi}) \neq (L\psi, \overline{\psi})$$

para cualesquier ψ, $\overline{\psi}$ de la clase Ψ. Señalemos, sin embargo, en el caso de ausencia de la corriente de Hall, es decir, $\Omega \equiv 0$, el operador $\dot{L}$:

$$\dot{L}\psi = -\operatorname{div}\left(\frac{1}{\sigma}\operatorname{grad}\psi\right)$$

es autoconjugado, $L = \dot{L}^*$.

Mostremos, por ejemplo, la justeza de la correlación $(\psi, L\psi) > 0$. Para ello hagamos uso de las fórmulas de Green:

$$(\psi, L\overline{\psi}) = \iint_G \psi \left\{ -\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{1}{\sigma}\left(\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x_1} + \Omega\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x_2}\right) - \right.$$
$$\left. -\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{1}{\sigma}\left(\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x_2} - \Omega\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x_1}\right)\right\} dx_1 \, dx_2 =$$
$$= \iint_G \frac{1}{\sigma} \quad \nabla\psi\nabla\overline{\psi} \, dx_1 \, dx_2 + \iint_G \frac{\Omega}{\sigma}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x_2} - \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x_1}\right) dx_1 \, dx_2 +$$
$$+ \oint_\Gamma \psi \frac{1}{\sigma}\left(\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial n} + \Omega\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial s}\right) ds. \tag{20}$$

Bajo el signo de la integral respecto a la frontera Γ se encuentra la función

$$\psi\left(\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial n} + \Omega\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial s}\right) = F(s),$$

la cual se reduce a cero, si para ψ y $\overline{\psi}$ está cumplida una de las condiciones (18) ó (19), es decir, ψ y $\overline{\psi}$ pertenecen a la clase Ψ. Suponiendo luego $\psi = \overline{\psi}$ en la fórmula (20), obtenemos de una vez

$$(\psi, L\psi) = \int\limits_G\int \frac{1}{\sigma} |\nabla\psi|^2 \, dx_1 \, dx_2 = (\psi, \dot{L}\psi) > 0.$$

En la fórmula (20) también se ve que

$$(\psi, L\overline{\psi}) = \int\limits_G\int \frac{1}{\sigma} \nabla\psi\nabla\overline{\psi} \, dx_1 \, dx_2 +$$

$$+ \int\limits_G\int \frac{\Omega}{\sigma} \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1} \frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x_2} - \frac{\partial\psi}{\partial x_2} \frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x_1} \right) dx_1 \, dx_2,$$

$$(\overline{\psi}, L\psi) = \int\limits_G\int \frac{1}{\sigma} \nabla\psi\nabla\overline{\psi} \, dx_1 \, dx_2 -$$

$$- \int\limits_G\int \frac{\Omega}{\sigma} \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1} \frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x_2} - \frac{\partial\psi}{\partial x_2} \frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x_1} \right) dx_1 \, dx_2,$$

es decir, $(\overline{\psi}, L\psi) = (L\overline{\psi}, \psi)$ sólo con la condición de que

$$\int\limits_G\int \frac{\Omega}{\sigma} \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1} \frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x_2} - \frac{\partial\psi}{\partial x_2} \frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x_1} \right) dx_1 \, dx_2 = 0,$$

la cual se cumple en el caso en que $\Omega = 0$.

3. Estática del cuerpo sólido elástico. Bajo la acción de las fuerzas aplicadas los sólidos se deforman en uno u otro grado, es decir, cambian de forma y volumen. Sean $x = (x_1, x_2, x_3)$ el radio vector de cierto punto de un sólido antes de aplicar a éste las fuerzas exteriores y $x' = (x_1', x_2', x_3')$, el radio vector del mismo punto material después de la aplicación de las fuerzas. El desplazamiento de un punto durante su deformación se caracteriza por el vector $u = x' - x$, el cual recibe el nombre de *vector de desplazamiento* y cuyas componentes son iguales a:

$$u_i(x) = x_i' - x_i, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Es evidente que el estado de deformación de un cuerpo sólido se describe por entero preestableciendo el vector de desplazamiento para cada punto del cuerpo.

Para deducir las ecuaciones que describan el estado de deformación de un sólido (se supone que está en equilibrio), destaquemos en el cuerpo un volumen arbitrario V limitado por una superficie S. Escribamos la condición de la igualdad a cero del vector principal de todas las fuerzas que actúan sobre el volumen V. Este vector

principal de las fuerzas de volumen es igual a

$$\iiint_V F\,dV,$$

donde $F = (F_1, F_2, F_3)$ es la fuerza que actúa sobre la unidad de volumen del cuerpo. El vector principal de las fuerzas que actúan sobre el volumen dado a través de la superficie S por lado de las partes que circundan el volumen V, es igual a

$$\iint_S f\,dS,$$

donde $f = (f_1, f_2, f_3)$ es la fuerza que actúa sobre la unidad de superficie. Igualando a cero la suma de los vectores principales de las fuerzas volumétricas y superficiales, obtendremos

$$\iiint_V F\,dV + \iint_S f\,dS = 0. \qquad (21)$$

Transformemos esta correlación. De acuerdo con la fórmula de Ostrogradsky la integral de superficie

$$\iint_S f_i\,dS$$

de la función escalar f_i se puede representar en forma de una integral de volumen de la divergencia de cierto vector τ_i, es decir,

$$\iint_S f_i\,dS = \iiint_V \operatorname{div} \tau_i\,dV, \qquad (22)$$

donde $\tau_i = \{\tau_{i1}, \tau_{i2}, \tau_{i3}\}$. Además

$$f_i = \tau_{i1} \cos(n, x_1) + \tau_{i2} \cos(n, x_2) + \tau_{i3} \cos(n, x_3), \qquad (23)$$

donde n es la normal exterior a la superficie S. Sustituyendo (22) en (21) y teniendo en cuenta que (21) es justa para cualquier volumen V, obtendremos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + F_i = 0, \quad i = 1, 2, 3. \qquad (24)$$

El tensor

$$\hat{T} = \begin{Vmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{Vmatrix}$$

se denomina *tensor de tensión* y las funciones τ_{ik}, *componentes* del tensor de tesnión.

Expliquemos el sentido mecánico de las componentes del tensor de tensión. Por la definición f_i es la proyección sobre el eje x_i de la fuerza f (que actúa sobre la unidad de superficie) aplicada a la superficie S. Eligiendo en S un punto en el cual la normal exterior está dirigida a lo largo del eje x_1, a base de (23) obtendremos que

$$f_i = \tau_{i1}.$$

Es evidente que τ_{i1} es la proyección, sobre el eje Ox_i, de la fuerza que actúa sobre la unidad de la superficie perpendicular al eje

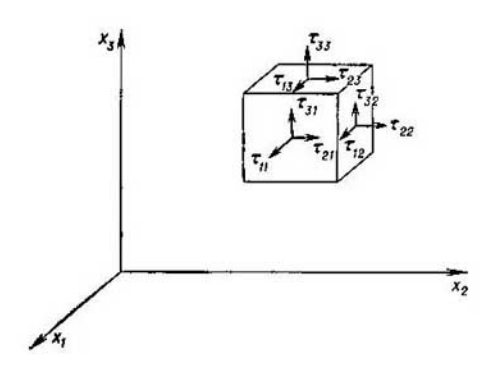


Fig. 2

Ox_i; esto quiere decir que τ_{11} es la componente normal de dicha fuerza a la vez que τ_{21} y τ_{31} son las componentes tangenciales. En la fig. 2 se ilustra el sentido mecánico de las componentes del tensor de tensión.

Ahora escribamos las condiciones de igualdad a cero de los momentos principales con respecto a los ejes de coordenadas. El momento respecto al eje Ox_1 es igual a cero:

$$\iiint\limits_V (x_2F_3 - x_3F_2)\, dV + \iint\limits_S (x_2f_3 - x_3f_2)\, dS = 0. \qquad (25)$$

En virtud de la fórmula (23) tenemos

$$\iint\limits_S (x_2f_3 - x_3f_2)\, dS = \iint\limits_S \{(x_2\tau_{31} - x_3\tau_{21}) \cos(n,\ x_1) +$$
$$+ (x_2\tau_{32} - x_3\tau_{22}) \cos(n,\ x_2) + (x_2\tau_{33} - x_3\tau_{23}) \cos(n,\ x_1)\}\, dS,$$

o, transformando la última integral de acuerdo con la fórmula de Ostrogradsky:

$$\iint_S (x_2 f_3 - x_3 f_2)\, dS = \iiint_V \operatorname{div}(x_2\tau_3 - x_3\tau_2)\, dV =$$

$$= \iiint_V \left\{ x_2 \left(\frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{33}}{\partial x_3} \right) - \right.$$

$$\left. - x_3 \left(\frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_3} \right) + \tau_{32} - \tau_{23} \right\} dV.$$

Sustituyendo esta correlación en (25) y tomando en consideración (24), hallamos

$$\iiint_V (\tau_{32} - \tau_{23})\, dV = 0.$$

Debido a la arbitrariedad del volumen V de aquí se desprende que $\tau_{32} = \tau_{23}$. Similarmente se establecen las correlaciones $\tau_{12} = \tau_{21}$, $\tau_{13} = \tau_{31}$.

Hemos demostrado que el tensor de tensión es simétrico, y por consiguiente el sistema (24) contiene sólo seis funciones desconocidas.

Con el fin de obtener el sistema de ecuaciones para hallar el vector de desplazamiento u, sometamos al examen el tensor de deformación y establezcamos la relación entre las componentes del tensor de tensiones y las del tensor de deformación.

Al deformar un sólido varían las distancias entre sus puntos. Consideremos dos puntos cualesquiera cercanos entre sí. Sea $x = (x_1, x_2, x_3)$ el radio vector del primer punto y $x + \Delta x = (x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3)$, el del segundo. El vector de desplazamiento del punto x es $u(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x))$ y el del punto $x + \Delta x$,

$$u(x + \Delta x) = (u_1(x + \Delta x),\ u_2(x + \Delta x),\ u_3(x + \Delta x)).$$

El vector $\Delta u = u(x + \Delta x) - u(x)$ caracteriza el cambio de posición del vector Δx, con esto

$$\Delta u_i = \sum_{j=1}^{3} \Delta x_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + O(|\Delta x|^2); \tag{26}$$

al mismo tiempo $\Delta x + \Delta u$ caracteriza la disposición recíproca de los puntos mencionados al haber desplazado éstos. Hagamos cálculo de la longitud del vector $\Delta x + \Delta u$:

$$|\Delta x + \Delta u|^2 = |\Delta x|^2 + 2 \sum_{i=1}^{3} \Delta x_i \Delta u_i + |\Delta u|^2 =$$

$$= |\Delta x|^2 \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \Delta x_i \Delta x_j + |\Delta u|^2 + O(|\Delta x|^3).$$

Ahora introduzcamos las suposiciones de la teoría geométricamente lineal de elasticidad. Consideraremos que el cuerpo en cuestión se suele deformar débilmente, y por eso podemos suponer que $\partial u_i/\partial x_j \ll 1$. Con esta suposición se admite hacer caso omiso de los cuadrados y los productos de las derivadas $\partial u_i/\partial x_j$ en comparación con sus primeras potencias.

Si

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1}=\frac{\partial u_2}{\partial x_2}=\frac{\partial u_3}{\partial x_3}=\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)=\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)=\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)=0, \quad (27)$$

entonces, salvo $O(|\Delta x|^3+|\Delta u|^2)$ el cuadrado de la distancia entre los puntos x y $x+\Delta x$ después de su desplazamiento se queda invariable, o sea, en este caso se puede considerar que no hay deformación.

De esta forma, con dichas suposiciones las condiciones (27) son las condiciones de un desplazamiento sin deformación, es decir, de un desplazamiento rígido.

Volvamos a escribir la (26) en la siguiente forma:

$$\Delta u_i=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\Delta x_j\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\Delta x_j\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)+$$
$$+O(|\Delta x|^2), \qquad i=1,\ 2,\ 3.$$

De esta anotación se deduce que después del desplazamiento de los puntos x y $x+\Delta x$ la variación de la posición del vector Δx, que se caracteriza con el vector Δu, salvo las magnitudes $O(|\Delta x|^2)$ se debe al desplazamiento rígido y la transformación con el tensor simétrico:

$$\hat{\varepsilon}=\begin{Vmatrix}\varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13}\\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23}\\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33}\end{Vmatrix},$$

donde

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \quad (28)$$

A este tensor se le da nombre de *tensor de deformación*, y las funciones $\varepsilon_{ij}(x)$ se denominan *componentes* del tensor de deformación.

Se puede mostrar que las componentes del tensor de la deformación tienen el siguiente sentido mecánico: ε_{ii} es el alargamiento relativo de un segmento inicialmente paralelo al eje Ox_i; $2\varepsilon_{ij}$, siendo $i\neq j$, representa la disminución de un ángulo inicialmente recto comprendido entre dos vectores dirigidos (positivamente) a lo largo de los ejes Ox_i y Ox_j.

La relación entre las componentes de los tensores de tensiones y de la deformación se rige por la *ley generalizada de Hooke*: las com-

ponentes del tensor de tensiones son las funciones lineales homogéneas de las componentes del tensor de la deformación, es decir:

$$\tau_{ij} = \sum_{\alpha, \beta=1}^{3} C_{ij\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}, \quad i, j=1, 2, 3.$$

El tensor de cuarto rango $C_{ij\alpha\beta}$ se llama *tensor de módulos de elasticidad.* Como se sabe, éste siempre posee las siguientes propiedades de simetría:

$$C_{ij\alpha\beta} = C_{ji\alpha\beta} = C_{ij\beta\alpha} = C_{\alpha\beta ij},$$

lo que quiere decir que entre 81 parámetros 21 son distintos.

En el caso de un sólido isótropo el número de los parámetros diferentes se reduce a cero. En este caso la *ley de Hooke* toma la forma

$$\begin{aligned} \tau_{ii} &= \lambda \sum_{j=1}^{3} \varepsilon_{jj} + 2\mu\varepsilon_{ii}, \quad i=1, 2, 3, \\ \tau_{ij} &= 2\mu\varepsilon_{ij}, \ i \neq j, \quad i, j=1, 2, 3, \end{aligned} \tag{29}$$

Sustituyendo (29) en (24) y teniendo en cuenta (28), obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones del equilibrio de un sólido elástico (o sea el sistema de Lamé) en desplazamientos:

$$\sum_{j=1}^{3} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right) \right] + F_i = 0. \tag{30}$$

Si el cuerpo es homogéneo, es decir, los factores de Lamé λ y μ no dependen de x, entonces el sistema (30), escrita en forma vectorial, tiene el aspecto:

$$\mu\Delta u + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} u + F = 0.$$

Si, además, $F_3 = 0$ y $u_3 = 0$ a la vez que F_1, F_2 y u_1, u_2 no dependen de x_3, tenemos un problema plano

$$\begin{aligned} (2\mu+\lambda)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + (\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + F_1 = 0, \\ (\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + (2\mu+\lambda)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + F_2 = 0. \end{aligned} \tag{31}$$

En calidad de condiciones de frontera, por ejemplo, para el sistema (31) se pueden preestablecer los valores en la frontera del recinto de las componentes del vector de desplazamiento u_1 y u_2, es decir,

$$u_1 = g, \quad u_2 = g_2$$

o las componentes del vector de tensión:

$$\tau_{11}\cos(n, x_1) + \tau_{12}\cos(n, x_2) = f_1,$$
$$\tau_{12}\cos(n, x_1) + \tau_{22}\cos(n, x_2) = f_2, \tag{32}$$

donde τ_{ij} se determinan a base de las correlaciones (29) y (28). También se pueden plantear otros problemas.

4. Equilibrio de una lámina. En calidad de otro ejemplo del problema sobre la teoría de elasticidad examinemos la ecuación de equilibrio de una placa delgada. Por placa entenderemos un cuerpo elástico limitado por dos lados por planos paralelos, la distancia entre los cuales es mucho menor que las demás dimensiones de este cuerpo.

Tomemos una placa isótropa homogénea cuyo espesor es igual a h y dispongámosla con respecto a los ejes de coordenadas de modo que el plano (x_1, x_2) sea plano medio de dicha placa. Supongamos que la carga que acciona sobre la placa es normal a su superficie y está aplicada, por ejemplo, a su superficie superior mientras que la inferior está libre.

Para obtener la ecuación que describa el estado deformado de una placa, hagamos uso de las correlaciones (24), deducidas anteriormente, suponiendo en éstas que $F_1 = F_2 = F_3 = 0$, es decir, considerando que las fuerzas volumétricas no existen.

Multipliquemos las dos primeras correlaciones (24) por x_3, integrémoslas respecto a x_3 entre los límites $-h/2$ y $h/2$ y transformemos los últimos términos de los primeros miembros integrando por partes. Tomando en consideración la simetría del tensor de tensión y que, según la condición, la carga es ortogonal a la superficie de la placa, es decir,

$$\tau_{13}(x_1, x_2, h/2) = \tau_{13}(x_1, x_2, -h/2) = \tau_{23}(x_1, x_2, h/2) = \tau_{23}(x_1, x_2, -h/2) = 0,$$

tendremos

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{-h/2}^{h/2}\tau_{11}x_3\,dx_3 + \frac{\partial}{\partial x_2}\int_{-h/2}^{h/2}\tau_{12}x_3\,dx_3 - \int_{-h/2}^{h/2}\tau_{13}\,dx_3 = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{-h/2}^{h/2}\tau_{12}x_3\,dx_3 + \frac{\partial}{\partial x_2}\int_{-h/2}^{h/2}\tau_{22}x_3\,dx_3 - \int_{-h/2}^{h/2}\tau_{23}\,dx_3 = 0. \tag{33}$$

Integremos respecto a x_3 entre los límites $-h/2$ y $h/2$ la tercera ecuación de (24), valiéndonos de la simetría del tensor de la tensión y de que la carga está aplicada a la superficie superior de la placa:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{-h/2}^{h/2}\tau_{13}\,dx_3 + \frac{\partial}{\partial x_2}\int_{-h/2}^{h/2}\tau_{23}\,dx_3 + \tau_{33}(x_1, x_2, h/2) = 0. \tag{34}$$

Introduzcamos las siguientes designaciones:

$$M_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{11} x_3 \, dx_3, \qquad M_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{22} x_3 \, dx_3$$

$$M_{12} = -\int_{-h/2}^{h/2} \tau_{12} x_3 \, dx_3, \qquad q = \tau_{33}(x_1, x_2, h/2), \tag{35}$$

$$Q_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{13} \, dx_3, \qquad Q_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{23} \, dx_3.$$

Las funciones $M_1(x_1, x_2)$ y $M_2(x_1, x_2)$ se denominan *momentos flectores*; la $M_{12}(x_1, x_2)$, *momento torsional* y las $Q_1(x_1, x_2)$ y $Q_2(x_1, x_2)$, *fuerzas interruptoras*. Con las nuevas designaciones las ecuaciones (33) y (34) tomarán la forma:

$$\frac{\partial M_1}{\partial x_1} - \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} - Q_1 = 0,$$

$$-\frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_2}{\partial x_2} - Q_2 = 0,$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} + q = 0.$$

Eliminando de aquí Q_1 y Q_2, obtendremos una ecuación con tres incógnitas

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x_1^2} - 2\frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x_1 \, \partial x_2} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial x_2^2} = -q. \tag{36}$$

Sin embargo, estas tres incógnitas no son independientes. De esto se puede cerciorar expresando los momentos M_1, M_2 y M_{12} a través de la función de flexión $w(x_1, x_2) \equiv u_3(x_1, x_2, 0)$. Supondremos que la flexión es pequeña en comparación con el espesor de la placa y la superficie media (aquella superficie en la cual se convierte el plano medio al haber aplicado la carga) es neutral, es decir, no se somete a las tracciones y compresiones.

Primeramente hallamos las expresiones en términos de w para los alargamientos relativos $\varepsilon_{11}(x_1, x_2, x_3)$ y $\varepsilon_{22}(x_1, x_2, x_3)$ y para el desplazamiento relativo $\varepsilon_{12}(x_1, x_2, x_3)$. Destaquemos un elemento de la placa cortado en ésta por los planos $x_1 = \dot{x}_1$, $x_1 = \dot{x}_1 + \Delta x_1$ y $x_2 = \dot{x}_2$, $x_2 = \dot{x}_2 + \Delta x_2$. Supondremos que después de la deformación de este elemento sus superficies laterales permanecen planas. Examinemos la sección del elemento deformado producida por un plano paralelo al plano Ox_1x_3. Esta sección está representada en la fig. 3.

Dada la pequeñez de las flexiones, también se pueden considerar pequeños los ángulos de giro de la superficie media y, por lo tanto,

tomar éstos iguales a sus tangentes. Entonces

$$\Delta\varphi_1 = \frac{\partial w}{\partial x_1}(x_1, x_2) - \frac{\partial w}{\partial x_1}(x_1 + \Delta x_1, x_2) = -\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\Delta x$$

El alargamiento relativo, según el eje Ox_1, de un elemento de la placa, el que dista de la superficie media a una magnitud x_3, es proporcional a x_3 y, por consiguiente,

$$\varepsilon_{11} = x_3 \frac{\Delta\varphi_1}{\Delta x_1} = -x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}. \quad (37)$$

Por analogía hallamos

$$\varepsilon_{22} = -x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}. \quad (38)$$

Los alargamientos relativos se han hallado.

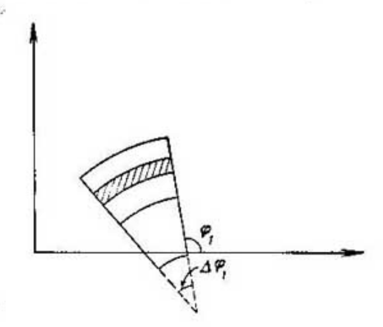


Fig. 3

Los planos que cortan dicho elemento de la superficie, se hacen girar durante la deformación. En tal caso el desplazamienro u_1 de un punto de la placa será tanto mayor, cuanto más lejos éste dista de la superficie media y cunato mayor es el ángulo de giro, a saber:

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = -x_3 \frac{\partial w}{\partial x_1}.$$

Razonando similarmente

$$u_2(x_1, x_2, x_3) = -x_3 \frac{\partial w}{\partial x_2}$$

Sustituyendo estas correlaciones en la expresión para ε_{12}, obtendremos

$$\varepsilon_{12} = -x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (39)$$

Para hallar las tensiones a base de las deformaciones indicadas hagamos uso de la ley de Hooke (29). En tal caso supondremos que la componente del tensor de tensión τ_{33} es ínfimamente menor que τ_{11} y τ_{22}. Entonces

$$\tau_{11}=\frac{4\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\varepsilon_{11}+\frac{2\mu\lambda}{2\mu+\lambda}\varepsilon_{22},$$
$$\tau_{22}=\frac{2\mu\lambda}{2\mu+\lambda}\varepsilon_{11}+\frac{4\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\varepsilon_{22},$$
$$\tau_{12}=2\mu\varepsilon_{12}.$$

Pasando de los coeficientes de Lamé λ y μ a otras constantes de la elasticidad, a saber: el módulo de elasticidad (el módulo de Young) E y el coeficiente de Poisson ν, los cuales se unen con λ y μ mediante las correlaciones

$$\lambda=\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)},\quad \mu=\frac{E}{2(1+\nu)},$$

tendremos

$$\tau_{11}=\frac{E}{1-\nu_2}(\varepsilon_{11}+\nu\varepsilon_{22}),\quad \tau_{22}=\frac{E}{1-\nu^2}(\nu\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}),\quad \tau_{12}=\frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{12}.$$

Sustituyendo aquí las correlaciones (37) — (39) y las nuevas presentaciones de τ_{ij} en la (35), obtendremos la presentación de los momentos en función de las flexiones

$$M_1=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right),\quad M_2=-D\left(\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right),$$
$$M_{12}=D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2},\tag{40}$$

donde $D=Eh^3/12(1-\nu^2)$ es el coeficiente de rigidez cilíndrica de la placa.

Sustituyendo, por fin, las fórmulas (40) en la ecuación (36), obtendremos la ecuación para la función de flexiones

$$\Delta^2 w=\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2\,\partial x_2^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4}=\frac{q}{D}.\tag{41}$$

Las condiciones de frontera para la ecuación (41) se obtienen con más facilidad al estudiar la variación de la energía de la placa. Sin detenernos en la deducción de la presentación de la energía, escribamos su expresión para el caso de una placa cuadrada con el lado igual a la unidad de longitud:

$$W=\frac{D}{2}\int_0^1\int_0^1\left\{(\Delta w)^2-2(1-\nu)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2\right]\right\}dx_1\,dx_2.\tag{42}$$

Variando la energía de (42) y transformando la obtenida expresión mediante la integración por partes, obtendremos las siguientes variantes de las condiciones de frontera (por ejemplo, siendo $x_1 = 0$):

1) Las condiciones de sujeción rígida

$$w(0, x_2) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x_1}(0, x_2) = 0.$$

2) Las condiciones de apoyo articulado

$$w(0, x_2) = 0, \quad D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right) = 0.$$

3) Las condiciones de borde libre

$$D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right) = 0, \quad D\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + (2-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right) = 0.$$

Las condiciones de frontera análogas se pueden escribir también para otros sectores de la frontera de la placa. Observemos, además, que si para dos lados contiguos de la placa vienen dadas las condiciones del borde libre, entonces para el ángulo que está entre estos lados se debe indicar complementariamente el valor del momento torsional.

Además de las condiciones de frontera mencionadas, se pueden establecer las condiciones de otro tipo en las cuales no fijaremos la atención de este libro.

§ 2. Nociones breves acerca de las ecuaciones elípticas

1. Ecuaciones de segundo orden. La ecuación diferencial lineal en derivadas parciales de segundo orden con n variables independientes tiene la forma

$$L(u) = \sum_{\alpha, \beta=1}^{n} A_{\alpha\beta}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \sum_{\alpha=1}^{n} B_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + C(x)u = f(x). \quad (1)$$

Aquí $A_{\alpha\beta}$, B_α, C y f son funciones reales de las variables independientes $x_1, x_2, \ldots, x_n$; las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ las interpretaremos como coordenadas de cierto punto x del espacio euclidiano n-dimensional E_n. También consideraremos que las funciones $A_{\alpha\beta}$, B_α y C son mensurables y acotadas. La ecuación (1) se denomina *elíptica en un punto* $\bar{x}$, si

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^{n} A_{\alpha\beta}(\bar{x})\xi_\alpha\xi_\beta \neq 0, \quad \text{siendo } |\xi| \neq 0, \quad (2)$$

donde $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ son cualesquier números reales y $|\xi| = \left(\sum_{\alpha=1}^{n} \xi_\alpha^2\right)^{1/2}$.

La condición de elipticidad (2) puede tener una forma más algo diferente de la anterior. El primer miembro de la desigualdad (2) es una función continua de ξ_α y por lo tanto, al cumplir la desigualdad (2), está definido de signo. Cambiando, en el caso necesario, los signos de todos los coeficientes $A_{\alpha\beta}$, en vez de la (2) obtendremos una condición equivalente:

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} A_{\alpha\beta}(\bar{x})\,\xi_\alpha\xi_\beta > 0, \quad \text{siendo} \quad |\xi| \neq 0. \tag{3}$$

Se puede considerar, sin limitar la generalización, que $A_{\alpha\beta}(\bar{x}) = A_{\beta\alpha}(\bar{x})$. Por esta razón la desigualdad (3) es la condición de definición positiva de la forma cuadrática. Pero para las formas cuadráticas positivamente definidas es válida la desigualdad

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} A_{\alpha\beta}(\bar{x})\,\xi_\alpha\xi_\beta \geqslant \nu(\bar{x}) \sum_{\alpha=1}^{n} \xi_\alpha^2, \quad \nu(\bar{x}) > 0, \tag{4}$$

donde $\nu(x)$ es el valor propio mínimo de la matriz simétrica $\|A_{\alpha\beta}\|$. Por consiguiente, determinando la elipticidad de la ecuación (1), se puede exigir el cumplimiento de la condición (4) en vez de la (2).

En el caso de un espacio bidimensional, es decir, para $n = 2$, la condición de elipticidad (2), o lo que es lo mismo, la exigencia de la definición positiva de la forma cuadrática (2), se puede formular como sigue:

$$A_{12}^2(\bar{x}) = A_{21}^2(\bar{x}) < A_{11}(\bar{x})\,A_{22}(\bar{x}). \tag{5}$$

La ecuación (1) se denomina *elíptica en un recinto* $D \in E_n$, si en cada punto de este recinto ésta es elíptica.

La ecuación (1) se dice que es *uniformemente elíptica en un recinto* $D \in E_n$, si en la condición (4)

$$\inf_{x \in D} \nu(\bar{x}) = \boldsymbol{\nu} > 0$$

En este caso en vez de la (4) se puede escribir

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} A_{\alpha\beta}(x)\,\xi_\alpha\xi_\beta \geqslant \nu \sum_{\alpha=1}^{n} \xi_\alpha^2, \quad \nu = \text{const} > 0, \quad x \in D. \tag{6}$$

De ejemplos de las ecuaciones elípticas de segundo orden pueden servir:

la ecuación de Laplace

$$\Delta u = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} = 0,$$

la ecuación de Poisson

$$-\Delta u = f(x),$$

la ecuación sin derivadas mixtas

$$-\sum_{\alpha=1}^{n} A_{\alpha\alpha}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}+\sum_{\alpha=1}^{n} B_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}+C(x)\,u=f(x),$$

siendo

$$A_{\alpha\alpha}(x)>0.$$

2. Ecuaciones de órdenes superiores. Una ecuación diferencial lineal en derivadas parciales de orden $2m$ con n variables independientes se puede representar en forma de

$$\sum_{k=0}^{2m}\ \sum_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k=1}^{n} A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}(x)\frac{\partial^k u}{\partial x_{\alpha_1}\,\partial x_{\alpha_2}\ldots\partial x_{\alpha_k}}=f(x). \qquad (7)$$

La ecuación (7) se llama *elíptica en un punto* $\bar{x}$, si

$$\sum_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{2m}=1}^{n} A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{2m}}(\bar{x})\,\xi_{\alpha_1}\xi_{\alpha_2}\ldots\xi_{\alpha_{2m}}\neq 0, \qquad (8)$$

siendo $|\xi|\neq 0$.
La ecuación (7) se denomina *elíptica en un recinto* $D\in E_n$, si en cada punto de este recinto dicha ecuación es elíptica.

Lo mismo que en el caso de las ecuaciones de segundo orden, la condición de elipticidad (8) se puede escribir en forma de

$$\sum_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{2m}=1}^{n} A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{2m}}(\bar{x})\,\xi_{\alpha_1}\xi_{\alpha_2}\ldots\xi_{\alpha_{2m}}\geqslant\nu(\bar{x})\sum_{\alpha=1}^{n}\xi_\alpha^{2m}. \qquad (9)$$

Un ejemplo importante de ecuación elíptica de orden superior es la *ecuación poliarmónica*

$$(-\Delta)^m u=f(x),$$

donde Δ^m significan la m-ésima iteración del operador laplaciano y se determinan mediante las correlaciones recurrentes

$$\Delta^1 u=\Delta u,\quad \Delta^2 u=\Delta(\Delta u),\ \ldots,\quad \Delta^m u=\Delta(\Delta^{m-1}u),\quad m>1.$$

Con $m=n=2$ tenemos la ecueción biarmónica en un plano

$$\Delta^2 u=\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4}+2\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2\,\partial x_2^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4}=f(x).$$

Toda ecuación elíptica, siendo $n>1$, tiene un orden par.

3. Sistemas de ecuaciones. Sea que un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales contiene p funciones incógnitas $u_1, u_2, \ldots, u_p$, cada una de las cuales depende de n variables, y supongamos que m_j es el orden superior de las derivadas de las funciones u_j comprendidas en dicho sistema. Este se puede escribir en

forma de

$$\sum_{j=1}^{p} \sum_{h=1}^{m_j} \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h=1}^{n} A^{(i,j)}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_h}(x) \frac{\partial^h u_j}{\partial x_{\alpha_1} \partial x_{\alpha_2} \ldots \partial x_{\alpha_h}} = f_i(x),$$
$$i = 1, 2, \ldots, p. \qquad (10)$$

Examinemos la determinante de orden p, la cual contiene en la intersección de la i-ésima fila y de la j-ésima columna un elemento

$$\sum_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m_j}=1}^{n} A^{(i,j)}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{m_j}} \xi_{\alpha_1} \xi_{\alpha_2} \ldots \xi_{\alpha_{m_j}}.$$

El sistema (10) se denomina *elíptico en un punto* $\bar{x}$, si

$$\det \left| \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m_j}=1}^{n} A^{(i,j)}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{m_j}}(\bar{x}) \xi_{\alpha_1} \xi_{\alpha_2} \ldots \xi_{\alpha_{m_j}} \right| \neq 0,$$
$$\text{siendo} \quad |\xi| \neq 0. \qquad (11)$$

El sistema (10) se llama *elíptico* en cierto *recinto* $D \in E_n$, siendo éste elíptico en cada punto $\bar{x} \in D$.

Un ejemplo sumamente importante de sistema elíptico es el sistema de ecuaciones de Lamé

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} = -f_1,$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3} = -f_2,$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_3} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_3} + \mu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \mu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} = -f_3.$$

Este sistema contiene tres funciones incógnitas ($p = 3$) las cuales dependen de las tres variables independientes ($n = 3$). El sistema comprende sólo derivadas segundas ($m_j = 2$). El determinante, que figura en la condición (11), para este sistema es igual a

$$\begin{vmatrix} \mu\xi^2 + (\lambda+\mu)\xi_1^2 & (\lambda+\mu)\xi_1\xi_2 & (\lambda+\mu)\xi_1\xi_3 \\ (\lambda+\mu)\xi_1\xi_2 & \mu|\xi|^2 + (\lambda+\mu)\xi_2 & (\lambda+\mu)\xi_2\xi_3 \\ (\lambda+\mu)\xi_1\xi_3 & (\lambda+\mu)\xi_2\xi_3 & \mu|\xi|^2 + (\lambda+\mu)\xi_3^2 \end{vmatrix} = \mu^2(\lambda + 2\mu)|\xi|^6.$$

Por lo menos, siendo $\lambda > 0$ y $\mu > 0$, lo que tiene lugar en los problemas reales, el determinante mencionado no se anula para $|\xi| \neq 0$.

En el caso bidimensional el sistema toma la forma

$$(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}+\mu\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}+(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1\partial x_2}=-f_1,$$

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1\partial x_2}+\mu\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}=-f_2,$$

mientras que el determinante de la condición (11) es igual a $\mu(\lambda+2\mu)|\xi|^4$.

4. Soluciones generalizadas. Sea dada para el recinto G del espacio euclidiano n-dimensional una ecuación elíptica de segundo orden

$$Lu \equiv \sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(A_{\alpha\beta}(x)\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right)+\sum_{\alpha=1}^{n}B_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}+C(x)u=f(x). \quad (12)$$

Se llama *solución generalizada de* $W_2^1(G)$ *para la ecuación* (12), a una función $u(x)$ perteneciente al espacio $W_2^1(G)$ y que satisface la igualdad integral

$$\int_G\left(-\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}A_{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\frac{\partial\eta}{\partial x_\alpha}+\sum_{\alpha=1}^{n}B_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\eta+Cu\eta\right)dx=\int_G f\eta\,dx \quad (13)$$

para cualquiera que sea la función $\eta(x)\in\mathring{W}_2^1(G)$.

Aquí $W_2^1(G)$ es el espacio de las funciones que pertenecen a $L_2(G)$ y tienen las primeras derivadas generalizadas las cuales también pertenecen a $L_2(G)$. La norma del espacio $W_2^1(G)$ se determina por la igualdad

$$\|v\|_{W_2^1(G)}=\left\{\int_G\left[\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)^2+u^2\right]dx\right\}^{1/2}. \quad (14)$$

$\mathring{W}_2^1(G)$ es un subespacio del espacio $W_2^1(G)$ obtenido por medio de la clausura, en la norma de $W_2^1(G)$, del conjunto de las funciones finitas infinitamente diferenciables con los portadores en G.

Para la ecuación (12) en la frontera Γ del recinto G está dada una condición de frontera

$$u(x)=0,\quad x\in\Gamma. \quad (15)$$

Se llama *solución generalizada de* $W_2^1(G)$ *para el problema* (12) (15), a la función $u(x)\in\mathring{W}_2^1(G)$ la cual, para cualquier función, $\eta(x)\in\mathring{W}_2^1(G)$, satisface la igualdad integral (13).

Supongamos que para la ecuación (12) en la frontera Γ está indicada la condición de frontera

$$\frac{\partial u}{\partial N} = \sum_{\alpha,\ \beta=1}^{n} A_{\alpha\beta} \frac{\partial u}{\partial x_\beta} \cos(n,\ x_\alpha) = 0, \tag{16}$$

donde n es una normal interior hacia Γ.

Se denomina *solución generalizada de* $\overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$ *para el problema* (12), (16), la función $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$ la cual satisface la igualdad integral (13) para cualquier función $\eta(x) \in W_2^1(G)$.

De un modo análogo se determinan las soluciones generalizadas para las ecuaciones de orden superior y para los sistemas de ecuaciones.

5. Planteamientos de variaciones de los problemas de contorno. Muchos problemas de la física matemática que se reducen a las ecuaciones elípticas, aparte de la formulación fundamental, relacionada con la búsqueda de la solución de la ecuación diferencial, también dan lugar al así llamado planteamiento de variaciones. Esto quiere decir que existe una funcional cuyo elemento minimizante coincide con la solución buscada del problema en cuestión. En este caso, en vez de plantear el problema de hallar una u otra solución de la ecuación diferencial, se puede plantear el problema de hallar el elemento que conceda el extremo a la funcional correspondiente.

Se pide hallar, en el recinto G del espacio euclidiano n-dimensional, la solución de la ecuación

$$Lu \equiv \sum_{\alpha,\ \beta=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(A_{\alpha\beta}(x) \frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right) - C(x)\, u = f(x), \tag{17}$$

la cual satisface en la frontera Γ del recinto G la condición de frontera homogénea de primer género

$$u(x) = 0, \quad x \in \Gamma. \tag{18}$$

Se supone que la ecuación (17) es elíptica y la matriz $\{A_{\alpha\beta}(x)\}$ es simétrica, es decir, $A_{\alpha\beta}(x) \equiv A_{\beta\alpha}(x)$. El problema (17), (18) es equivalente al siguiente problema de variaciones: en la clase de las funciones suficientemente lisas que satisfacen la condición (18), hallar aquella que minimice la funcional

$$I(u) \equiv \frac{1}{2} \int_G \left[\sum_{\alpha,\ \beta=1}^{n} A_{\alpha\beta}(x) \frac{\partial u}{\partial x_\beta} \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + C(x)\, u^2 \right] dx + \int_G f(x)\, u(x)\, dx. \tag{19}$$

Si en el recinto G se pide hallar la solución de la ecuación (17) la cual satisface las condiciones de frontera de segundo género (16), entonces el correspondiente problema de variaciones se plantea del modo siguiente: en la clase de las funciones suficientemente lisas hallar aquella que minimice la funcional (19). En el caso de un problema con las condiciones de frontera de segundo género, a las funciones, entre las cuales se busca el elemento minimizante, no se les imponen ningunas condiciones de frontera.

Para el sistema de Lamé

$$\sum_{j=1}^{2}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\lambda\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right)+\frac{\partial}{\partial x_j}\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right]+F_i=0,\quad i=1,\ 2,$$

con las condiciones de frontera de segundo orden

$$\sum_{j=1}^{2}\tau_{ij}\cos(n,\ x_j)+f_i=0,\quad i=1,\ 2,\quad x\in\Gamma,$$

el problema de variaciones se plantea del modo siguiente: en la clase de las funciones vector suficientemente lisas hallar aquella que minimice la funcional

$$I(u)\equiv W(u)-\int_G\sum_{i=1}^{2}F_iu_i\,dx-\int_\Gamma\sum_{i=1}^{2}f_iu_i\,ds,$$

donde

$$W(u)\equiv\frac{1}{2}\int_G\left\{2\mu\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2+\lambda\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2+\right.\right.$$

$$\left.+\mu\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2\right\}dx.$$

La funcional $W(u)$ es la de la energía de deformación elástica.

Señalemos, por fin, el planteamiento de variaciones del primer problema de contorno para la ecuación biarmónica bidimensional. En el recinto G se busca la solución de la ecuación

$$\Delta^2u=f(x),\quad x\in G,\tag{20}$$

que satisface en la frontera Γ las condiciones de frontera de primer género:

$$u(x)=\frac{\partial u(x)}{\partial n}=0,\quad x\in\Gamma.\tag{21}$$

El planteamiento de variaciones del problema (20), (21) es el siguiente: en la clase de las funciones suficientemente lisas que satisfacen las condiciones (21), hallar aquella que minimiza la funcional

$$I(u) \equiv \frac{1}{2}\int_G \left\{(\Delta u)^2 - 2(1-\nu)\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2\right]\right\} dx - \int_G f(x)\,u\,dx. \quad (22)$$

En los problemas relacionados con la flexión de una placa ν es el coeficiente de Poisson. En dicho caso el elemento minimizante no depende de ν, así que, para simplificar la funcional $I(u)$, se puede suponer $\nu = 1$.

Si a la clase de las funciones entre las cuales se busca el mínimo de la funcional (22) no se imponen las condiciones de frontera (21), todo elemento minimizante de esta funcional será la solución de la ecuación (20) con las llamadas condiciones de frontera del contorno libre (véase el p. 4 § 1).

CAPÍTULO II

MÉTODOS DE CONSTRUCCIÓN DE LOS ESQUEMAS EN DIFERENCIAS

§ 1. Conceptos fundamentales del método de redes

El método de diferencias finitas*) ,o sea el método de redes, en el tiempo presente, es uno de los métodos más difundidos de resolución aproximada de los problemas de contorno para las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. La esencia del método consiste en lo siguiente. El recinto de variación continua de los argumentos (por ejemplo, un segmento, un rectángulo, etc.) se sustituye por un conjunto finito (discreto) de los puntos (o sea, los nodos), llamado red; en vez de las funciones de un argumento continuo se analizan las funciones de un argumento discreto definidas en los nodos de la red y llamadas funciones de red. Las derivadas, que forman parte de la ecuación diferencial y de las condiciones de frontera, se sustituyen (se aproximan) por las razones en diferencias, o sea, por las combinaciones lineales de los valores de la función de red en ciertos nodos de la red; en tal caso el problema de contorno para la ecuación diferencial se sustituye por un sistema de ecuaciones algebraicas (esquema en diferencias) lineales (si el problema inicial era lineal).

Si el problema de contorno en diferencias obtenido de este modo es resoluble y su solución, al desmenuzar la red, se aproxima (converge) a la solución de problema inicial para la ecuación diferencial, dicha solución se toma como aproximada del problema inicial.

A pesar de la sencillez aparente del método, antes de empezar la resolución de un problema concreto es necesario saber responder a las siguientes preguntas:

1. ¿Cómo se elige la red?
2. ¿De qué modo se escribe el esquema en diferencias?

Una vez solucionadas estas cuestiones, tiene importancia la información sobre las siguientes:

---

* En adelante diremos simplemente método en diferencias, ecuación en diferencias, etc. entendiendo por éstos método en diferencias finitas, ecuación en diferencias finitas, etc. (*Nota de la Red.*)

3. ¿Con qué precisión el esquema en diferencias aproxima el problema inicial?

4. ¿Es estable el esquema en diferencias, y en qué sentido?

5. ¿Cuál es la velocidad de convergencia de la resolución del problema en diferencias a la del problema inicial?

Precisamente al análisis de estas cuestiones para unos u otros problemas está dedicado este libro.

1. Redes y funciones de red. Examinemos los ejemplos más sencillos de las redes. Sea el segmento $0 \leqslant x \leqslant l$ el recinto de variación del argumento x. Dividamos este segmento por los puntos $x_i = ih$, $i = 0, 1, \ldots, N$ en N partes iguales, cada una de las cuales es de longitud de $h = l/N$. El conjunto de los puntos $x_i = ih$, $i = 0, 1, 2, \ldots, N$, se denomina *red uniforme* en el segmento $0 \leqslant x \leqslant l$ y se designa por $\bar{\omega} = \{x_i = ih \mid i = 0, 1, 2, \ldots, N\}$, mientras que el número h, que es la distancia entre los puntos (o nodos) de la red $\bar{\omega}$, se llama *paso de la red*.

El segmento $[0, l]$ se puede dividir en N partes, introduciendo los puntos arbitrarios $0 < x_1 < x_2 < \ldots x_i < x_{i+1} < \ldots < x_{N-1} < l$. Entonces obtendremos una red $\bar{\omega} = \{x_i \mid i = 0, 1, 2, \ldots, N, x_0 = 0, x_N = l\}$ con el paso $h_i = x_i - x_{i-1}$, el cual depende del número i del nodo x_i. Si $h_i \neq h_{i+1}$ aunque para un número i, la red $\bar{\omega}$ se dice que es *no uniforme*. Si $h_i = \text{const} = h = l/N$ para todos los $i = 1, 2, \ldots, N$, en tal caso obtenemos la *red uniforme* trazada anteriormente.

En la recta infinita $-\infty < x < \infty$ se puede considerar la red $\Omega = \{x + ih \mid i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ que tiene el origen en cualquier punto x y consta de un número infinito de los nodos.

A veces es cómodo trazar la red de modo que el primer paso sea el único diferente de los demás y los restantes coincidan. De ejemplo de una red semejante en el $[0, l]$ puede servir la red

$$\bar{\omega} = \{x_i = ih + 0{,}5h \mid i = 0, 1, 2, \ldots, N, h = l/(N + 0{,}5)\}.$$

En este caso el extremo izquierdo del segmento $x = 0$ no es nodo de la red.

Sea la región de variación de los argumentos $x = (x_1, x_2)$ un rectángulo $D = \{x = (x_1, x_2) \mid 0 \leqslant x_\alpha \leqslant l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$. Construyamos en el segmento $0 \leqslant x_\alpha \leqslant l_\alpha$ la red $\bar{\omega}_\alpha = \{x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h_\alpha \mid i_\alpha = 0, 1, 2, \ldots, N_\alpha\}$ con el paso $h_\alpha = l_\alpha / N_\alpha$. El conjunto de los nodos $x = x_i = (x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)})$, $i = (i_1, i_2)$ con las coordenadas $x_1^{(i_1)} = i_1 h_1$ y $x_2^{(i_2)} = i_2 h_2$ la llamaremos *red en el rectángulo D* y designaremos por $\bar{\omega} = \{x = (x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}) \mid x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h_\alpha, i_\alpha = 0, 1, 2, \ldots, N_\alpha; \alpha = 1, 2$. Esta red es uniforme para cada una de las variables x_1 y x_2. Si aunque una sola de las redes $\bar{\omega}_\alpha$ no es uniforme, toda

la red $\bar{\omega}$ se denomina no uniforme. Si $h_1 = h_2$, la red es *cuadrada*. En el caso de que $h_1 \neq h_2$, esta red uniforme $\bar{\omega}$ la llamaremos *rectangular*. La red $\bar{\omega}$ consta evidentemente de los puntos de intersección de las rectas $x_1 = x_1^{(i_1)} = i_1 h_1$, $i_1 = 0, 1, 2, \ldots, N_1$, con las rectas $x_2 = x_2^{(i_2)} = i_2 h_2$, $i_2 = 0, 1, 2, \ldots, N_2$.

La función $\varphi = \varphi(x_i)$ del argumento discreto x_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$ $\ldots, N$, se suele llamar *función de red* definida sobre la red $\bar{\omega}$ (la red está preestablecida en el segmento $[0, l]$).

A toda función continua $f(x)$, dada en el segmento $[0, l]$, se le puede hacer corresponder una función de red φ_i indicada en la red $\bar{\omega}$ (proyectando $f(x)$ sobre la red $\bar{\omega}$), suponiendo, por ejemplo, que $\varphi_i = f(x_i) \equiv f_i$, $\varphi_i = \frac{1}{h} \int\limits_{x_i - 1/2}^{x_i + 1/2} f(x)\, dx$, etc. La segunda de las proyecciones indicadas sobre la red se puede realizar no sólo para las funciones continuas, sino también para las funciones con discontinuidades de primer género e incluso para las funciones integrables corrientes.

Se debe tener en cuenta que una misma función de red, al ser indicada en dos redes diferentes, pero que tienen nodos comunes, no siempre toma en dichos nodos un mismo valor. Para precisar supongamos que existen cierta función de red $\varphi^h(x)$ y dos redes cuyos pasos son $h = h_1$ y $h = h_2$, respectivamente, además $h_1 \neq h_2$. Designemos cada una de dichas redes por ω^{h_1} y ω^{h_2}. Entonces, hablando en general, $\varphi^{h_1}(x) \neq \varphi^{h_2}(x)$, siendo $x \in \omega^{h_1}$ y $x = \omega^{h_2}$. Uno de los ejemplos más sencillos de semejantes funciones es la función de red $\varphi_i = \frac{1}{h} \int\limits_{(i-0,5)h}^{(i+0,5)h} f(x)\, dx$, donde $f(x)$ es una función determinada de argumento continuo.

2. Aproximación de los operadores diferenciales elementales. Error de aproximación. El operador L_h que transforma la función de red y en una función de red $Y = L_h y$ se denomina operador de red u *operador en diferencias*. Un operador diferencial L dado en la clase de las funciones de argumento continuo puede ser sustituido aproximadamente (o ser aproximado) por el operador en diferencias L_h indicado sobre las funciones de red. Para ello cada una de las derivadas se sustituye por la razón en diferencias la cual contiene los valores de la función de red en varios nodos de la red. El conjunto de los nodos de la red, empleada al escribir el operador en diferencias, se llama *modelo* de este operador.

Veremos cómo se realiza la aproximación para las primeras y segundas derivadas de la función de una sola variable.

Sea $\Omega = \{\bar{x} + ih \mid i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ una red uniforme con el paso h en la recta $-\infty < x < \infty$. Examinemos la primera derivada $Lv \equiv v'$ de la función $v(x)$. Es posible expresarla en diferencias de modos diversos. Por ejemplo:

$$Lv \sim \frac{v_i - v_{i-1}}{h} \equiv L_h^- v_i$$

es *la razón izquierda en diferencias*;

$$Lv \sim \frac{v_{i+1} - v_i}{h} \equiv L_h^+ v_i,$$

la razón derecha en diferencias y

$$Lv \sim \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2h} \equiv L_h^0 v_i,$$

la razón central en diferencias.

Aquí $v_i = v(x_i)$, el signo $\sim$ significa una correspondencia o aproximación. Al sustituir Lv por la expresión en diferencias $L_h v$ se admite el error $L_h v_i - (Lv)_i = \psi_i$ llamado *error de aproximación* del operador L por el operador en diferencias L_h. Naturalmente se exige que, al tender h a cero, este error también se tienda a cero. Para evaluar ψ_i se debe suponer que $v(x)$ es una función lisa. Sea $v(x) \in C^{(m)}$, donde $m \geqslant 2$. Desarrollemos $v(x)$ en el entorno del punto $x = x_i$ según la fórmula de Taylor:

$$v_{i\pm 1} = v_i \pm h v_i' + O(h^2)$$

y calculemos

$$\psi_i^- = L_h^- v_i - v_i' = O(h), \quad \psi_i^+ = L_h^+ v_i - v_i' = O(h).$$

De aquí se deduce que $\psi_i^{\pm} \to 0$ con $h \to 0$.

Sea L un operador diferencial y L_h, un operador en diferencias indicado en cierta red Ω, donde h es el parámetro que caracteriza la frecuencia de los pasos. Se suele decir que el operador en diferencias L_h:

1) *aproxima* el operador diferencial L en el nodo $x_i \in \Omega$, si $\psi_i = L_h v_i - (Lv)_i$, donde $v(x)$ es una función suficientemente lisa, se tiende a cero para $h \to 0$;

2) *aproxima a L con el orden n* $(n > 0)$ en el nodo $x_i \in \Omega$, si $\psi_i = O(h^n)$.

Valiéndonos de las fórmulas para $L_h^{\pm}$, vemos que $L_h^- v_i$ y $L_h^+ v_i$ aproximan $Lv = v'$ con el primer orden para $v \in C^{(m)}$, donde $m \geqslant 2$. El aumento del número m no cambia el orden de aproximación.

Tomemos ahora el operador L_h^0. No es difícil mostrar que $L_h^0 v_i$ aproxima $v'(x)$, para $v(x) \in C^{(m)}$, donde $m \geqslant 3$, con el segundo orden.

En lo sucesivo emplearemos las designaciones

$$v_{\bar{x},\, i} \equiv (v_i - v_{i-1})/h, \quad v_{x,\, i} \equiv (v_{i+1} - v_i)/h,$$
$$v_{\overset{\circ}{x},\, i} = (v_{i+1} - v_{i-1})/(2h) = \frac{1}{2}(v_{x,\, i} + v_{\bar{x},\, i}).$$

En los casos en los cuales el número i del nodo no tiene importancia, lo omitiremos y escribiremos sencillamente $v_{\bar{x}}$, v_x y $v_{\overset{\circ}{x}}$.

Analicemos ahora la segunda derivada $Lv \equiv v''$. Es evidente que no es posible aproximarla en un modelo de dos puntos. Elijamos el *modelo de tres puntos* que consta de los nodos x_{i-1}, x_i y x_{i+1} y examinemos el operador en diferencias

$$L_h v_i \equiv v_{\bar{x}x,\, i} = \frac{1}{h}(v_{x,\, i} - v_{\bar{x},\, i}) = \frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{h^2}.$$

Si $v(x) \in C^{(m)}$, siendo $m \geqslant 4$, se puede escribir que

$$v_{i\pm 1} = v_i \pm hv_i' + \frac{h^2}{2} v_i'' \pm \frac{h^3}{6} v_i''' + O(h^4).$$

De aquí se desprende (el subíndice i se omite) que

$$v_{\bar{x}x} - v'' = O(h^2),$$

es decir, $v_{\bar{x}x}$ aproxima v'' con el segundo orden.

Señalemos que en realidad el orden de aproximación del operador en diferencias L_h depende del orden m de diferenciabilidad de la función $v(x)$. De hecho en todos los casos hablábamos de aquel orden máximo de aproximación, el cual no cambia al aumentar el número m de la clase $C^{(m)}$, considerando que $v(x)$ es una función cualquiera de $C^{(m)}$.

Examinemos un operador más complicado

$$Lu \equiv \Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2},$$

donde $u \equiv u(x_1, x_2)$ es una función de dos argumentos x_1 y x_2 los cuales varían en el plano Ox_1x_2. Introduzcamos la red

$$\Omega = \{x_i = x_{i_1 i_2} = (x_1^{(i_1)},\ x_2^{(i_2)}) \mid x_\alpha^{(i_\alpha)} = x_\alpha + i_\alpha h_\alpha,$$
$$i_\alpha = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots,\ \alpha = 1,\ 2\}$$

y hagamos la sustitución

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right|_{x=x_i} \sim \frac{u(x_1^{(i_1-1)},\ x_2^{(i_2)}) - 2u(x_1^{(i_1)},\ x_2^{(i_2)}) + u(x_1^{(i_1+1)},\ x_2^{(i_2)})}{h_1^2} = u_{\bar{x}_1 x_1,\, i},$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right|_{x=x_i} \sim \frac{u(x_1^{(i_1)},\ x_2^{(i_2-1)}) - 2u(x_1^{(i_1)},\ x_2^{(i_2)}) + u(x_1^{(i_1)},\ x_2^{(i_2+1)})}{h_2^2} = u_{\bar{x}_2 x_2,\, i}.$$

Como resultado obtendremos el operador en diferencias $L_h u_i = (u_{\bar{x}_1 x_1} + u_{\bar{x}_2 x_2})_i$. Este operador está definido en el modelo que consta de cinco puntos $(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)})$, $(x_1^{(i_1-1)}, x_2^{(i_2)})$, $(x_1^{(i_1+1)}, x_2^{(i_2)})$, $(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2-1)})$, $(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2+1)})$.

Puesto que

$$u_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} = \partial^2 u/\partial x_\alpha^2 + O(h_\alpha^2), \quad \alpha = 1, 2,$$

el operador L_h tiene el segundo orden de aproximación por h_1 y h_2:

$$\psi(x_i) = L_h u_{i_1, i_2} - (Lu)_{i_1 i_2} = O(h_1^2 + h_2^2).$$

Hasta aquí acotábamos la magnitud del error de aproximación $\psi = L_h v - Lv$ en un nodo aislado $x_i \in \Omega$. Si el operador L_h aproxima el operador L en todos los nodos $x_i \in \Omega$, se suele decir que L_h *aproxima* L *en la red* Ω. En este caso para acotar el error de aproximación es cómodo utilizar la norma C:

$$\|\psi\|_C = \max_{x \in \Omega} |\psi(x)|. \tag{1}$$

Para acotar la magnitud de la función de red ψ se pueden emplear también otras normas, tales como son

$$\|\psi\|_{L_1} = \sum_{x \in \Omega} H |\psi(x)|, \quad \|\psi\|_{L_2} = \left(\sum_{x \in \Omega} H \psi^2(x)\right)^{1/2}, \tag{2}$$

donde $H = h$ en el caso unidimensional y $H = h_1 h_2$ para el caso bidimensional.

Sea $\|\psi\|$ cierta norma para las funciones $\psi(x)$ indicadas sobre la red Ω. En adelante diremos que el operador en diferencias L_h: 1) *aproxima* el operador diferencial L *por la norma* $\|\cdot\|$, si $\|\psi\| = \|L_h v - Lv\| \to 0$ para $h \to 0$; 2) *aproxima con el orden* $n > 0$ (L_h tiene el n-ésimo orden de aproximación), si $\|\psi\| = O(h^n)$, o sea $\|\psi\| \leqslant Mh^n$, donde $M = \text{const} > 0$ no depende de h.

Si v es una función suficientemente lisa y Ω es una red uniforme, los operadores en diferencias examinados más arriba tienen un mismo orden de aproximación en cualquiera de las norma (1), (2).

En el caso de una red no uniforme el asunto es otro. Sea

$$\bar{\omega} = \{x_i \mid i = 0, 1, \ldots, N, \ x_0 = 0, \ x_N = 1\}$$

una red no uniforme con los pasos $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, N$, en el segmento $[0, 1]$. Examinemos el operador $Lv = v''$. Le pongamos en concordancia el operador en diferencias

$$L_h v_i = \frac{1}{\hbar_i}\left[\frac{v_{i+1} - v_i}{h_{i+1}} - \frac{v_i - v_{i-1}}{h_i}\right], \quad \hbar_i = \frac{1}{2}(h_i + h_{i+1}), \tag{3}$$

definido en el modelo de tres puntos (x_{i-1}, x_i, x_{i+1}).

Calculemos el error de aproximación

$$\psi_i = L_h v_i - (Lv)_i.$$

Suponiendo que $v(x) \in C^{(4)}[0, 1]$ y efectuando los desarrollos según la fórmula de Taylor

$$v_{i+1} = v_i + h_{i+1} v_i' + \frac{h_{i+1}^2}{2} v_i'' + \frac{h_{i+1}^3}{6} v_i''' + O(h_{i+1}^4),$$

$$v_{i-1} = v_i - h_i v_i' + \frac{h_i^2}{2} v_i'' - \frac{h_i^3}{6} v_i''' + O(h_i^4),$$

hallamos

$$\psi_i = \frac{h_{i+1} - h_i}{3} v_i''' + O(h_{i+1}^2) + O(h_i^2) = \frac{h_{i+1} - h_i}{3} v_i''' + O(\hbar_i^2).$$

De aquí se ve que $\|\psi\|_C = O(h_0)$, $\|\psi\|_{L_1} = O(h_0)$, $\|\psi\|_{L_2} = O(h_0)$, $h_0 = \max\limits_{\bar\omega} h_i$. Por consiguiente, L_h tiene el primer orden de aproximación en las normas $\|\cdot\|_C$, $\|\cdot\|_{L_1}$, $\|\cdot\|_{L_2}$.

Mostremos que para la norma debidamente eligida, a saber, para

$$\|\psi\| = \Big[\sum_{i=1}^{N-1} h_i \Big(\sum_{k=1}^{i} \hbar_k \psi_k\Big)^2\Big]^{1/2} \tag{4}$$

el operador (3) tendrá el segundo orden de aproximación:

$$\|\psi\| = \|L_h v - Lv\| = O(h_0^2).$$

Como $v_i''' = v_{i+1}''' + O(h_{i+1})$, entonces

$$(h_{i+1} - h_i) v_i''' = \frac{h_{i+1}^2 - h_i^2}{2(h_i + h_{i+1})} v_i''' + O(\hbar_i^2) = \frac{1}{\hbar_i}(h_{i+1}^2 v_{i+1}''' - h_i^2 v_i''') + O(\hbar_i^2),$$

y por eso ψ_i se representa en la forma

$$\psi_i = \mathring{\psi}_i + \psi_i^*,$$

donde

$$\psi_i^* = O(h_i^2), \quad \mathring{\psi}_i = \frac{1}{\hbar_i}(\eta_{i+1} - \eta_i) = \eta_{\hat{x}, i},$$

$$\eta_i = \frac{1}{6} h_i^2 v_i''' = O(h_i^2).$$

Calculando $\sum\limits_{k=1}^{i} \hbar_k \mathring{\psi}_k = \sum\limits_{k=1}^{i} (\eta_{k+i} - \eta_k) = \eta_{i+1} - \eta_1$ y teniendo en cuenta que $|\eta| = O(h_0^2)$, obtendremos $\|\mathring{\psi}\| = O(h_0^2)$. De aquí se desprende que $\|\psi\| \leqslant \|\mathring{\psi}\| + \|\psi^*\| \leqslant M h_0^2$, donde $M = \text{const} > 0$ no depende de la red, es decir, el operador L_h, preestablecido por la fórmula (3),

tiene el segundo orden de aproximación en la norma $\| \cdot \|$, la cual se determina según la correlación (4) en toda red no uniforme $\bar{\omega}$. Este resultado es válido también para las normas

$$\|\psi\| = [\sum_{i=1}^{N-1} h_i (\sum_{k=i}^{N-1} \hbar_k \psi_k)^2]^{1/2}, \qquad \|\psi\| = \sum_{i=1}^{N-1} h_i \left| \sum_{k=1}^{i} \hbar_k \psi_k \right|.$$

Señalemos que $\|\psi\| \leqslant \|\psi\|_{L_1} \leqslant \|\psi\|_{L_2} \leqslant \|\psi\|_C$. Las desigualdades inversas para las funciones de red arbitrarias no son justas. En lo sucesivo para las razones en diferencias sobre una red no uniforme emplearemos las siguientes designaciones

$$v_{\bar{x},i} = \frac{v_i - v_{i-1}}{h_i} \qquad v_{x,i} = \frac{v_{i+1} - v_i}{h_{i+1}}, \quad v_{\hat{x},i} = \frac{v_{i+1} - v_i}{\hbar_i},$$

$$v_{\bar{x}\hat{x},i} = \frac{1}{\hbar_i}(v_{x,i} - v_{\bar{x},i}) = \frac{1}{\hbar_i}\left[\frac{v_{i+1} - v_i}{h_{i+1}} - \frac{v_i - v_{i-1}}{h_i}\right].$$

3. Planteamiento de los problemas en diferencias. Aproximación y convergencia. Hasta aquí nos hemos ocupado de la aproximación de los operadores diferenciales elementales por los operadores en diferencias. En general se requiere resolver la ecuación diferencial $Lu = -f(x)$ con ciertas condiciones complementarias (por ejemplo, las de contorno). Por lo tanto, además de construir el operador en diferencias, es necesario aproximar sobre la red el segundo miembro de la ecuación diferencial y las condiciones complementarias, después de lo cual es posible plantear el problema en diferencias, o sea, escribir el sistema de ecuaciones en diferencias (algebraicas).

Analicemos varios ejemplos de planteamiento de los problemas en diferencias.

EJEMPLO 1. Al problema de contorno para la ecuación diferencial de segundo orden

$$Lu = u'' = -f(x),\ 0 < x < 1,\ u(0) = g_0,\quad u(1) = g_1 \quad (5)$$

sobre la red uniforme $\bar{\omega}$ se ponen en correspondencia los problemas de contorno en diferencias:

$$(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) = -\varphi_i h^2,$$
$$i = 1, 2, \ldots, N-1,\ y_0 = g_0,\ y_N = g_1, \quad (6)$$

donde $\varphi_i = f(x_i)$,

$$(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) = -\bar{\varphi}_i h^2,$$
$$i = 1, 2, \ldots, N-1,\ y_0 = g_0,\ y_N = g_1, \quad (7)$$

donde $\bar{\varphi}_i = f(x_i) + \frac{h^2}{12} f''(x_i)$.

EJEMPLO 2. Al problema de contorno

$$u'' = -f(x),\ 0 < x < 1,\ u'(0) = \varkappa u(0) - g_0,\ u(1) = g_1 \quad (8)$$

sobre la red uniforme $\bar{\omega}$ pongamos en correspondencia dos problemas en diferencias:

$$\frac{1}{h^2}(y_{i-1}-2y_i+y_{i+1})=-\varphi_i, \quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ N-1,$$
$$\frac{1}{h}(y_1-y_0)=\varkappa y_0-g_0,\ y_N=g_1, \quad (9)$$

$$\frac{1}{h^2}(y_{i-1}-2y_i+y_{i+1})=-\varphi_i, \quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ N-1,$$
$$\frac{1}{h}(y_1-y_0)=\varkappa y_0-\left(g_0+\frac{h}{2}f(0)\right), \quad y_N=g_1. \quad (10)$$

Apartando por ahora la cuestión de solubilidad de los problemas (6), (7), (9) y (10), esclarecemos la cuestión sobre el error de aproximación de dichos problemas. El operador en diferencias $\tilde{\Lambda}$, determinable por la correlación

$$\tilde{\Lambda}y_i\equiv y_{i+1}-2y_i+y_{i-1} \quad (11)$$

(véanse las (6) y (7)), no aproxima el operador diferencial $Lu=$ $=\frac{d^2u}{dx^2}$, puesto que

$$\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_i-\tilde{\Lambda}v_i=O(1).$$

El segundo miembro de la (6) tampoco aproxima el segundo miembro de la (5). Sin embargo, la ecuación diferencial (5) se aproxima por la ecuación en diferencias (6), ya que la (6) es una ecuación cuyo sentido no cambia al multiplicar ésta por alguna función. Multiplicando (6) por $1/h^2$, en el primer miembro obtenemos la aproximación del operador d^2/dx^2 mientras que en el segundo miembro, la aproximación del segundo miembro de la (5). En toda función $v(x)\in C^{(4)}$, según se ha mostrado en el p. 2, el operador en diferencias $\Lambda_h=h^{-2}\tilde{\Lambda}$ aproxima el operador diferencial d^2/dx^2 con el segundo orden. El segundo miembro de la (5) se aproxima exactamente. Por esta razón, si el error de aproximación de la ecuación en diferencias lo hubiéramos determinado mediante la correlación

$$\psi(x)=L_hv+\varphi-(Lv+f), \quad x\in\omega, \quad (12)$$

donde $v(x)$ es una función cualquiera suficientemente lisa, habríamos obtenido que $\psi(x)=O(h^2)$.

La ecuación en diferencias (7), al haberse multiplicado por h^{-2}, también habría tenido el error de aproximación $O(h^2)$ a base de la determinación señalada. Mas, según se ha señalado en el p. 2, el orden del error de aproximación del operador depende esencialmente de la lisura de la función en la cual se realiza la verificación. Por eso, si en la (12) la función $v(x)$ tiene una lisura menor que $C^{(4)}$, el

error de aproximación de la ecuación (6) será peor que $O(h^2)$. En relación a ello se debe preestablecer para $v(x)$ la misma lisura que para la resolución del problema que se aproxima (5). Más aún, al aproximar el problema (5), la exactitud de la solución aproximada del problema (6) en comparación con la solución del problema (5) debe interesarnos más que el error de aproximación del esquema, aunque estas cuestiones están vinculadas estrechamente una con otra.

Sea la función $z(x) = y(x) - u(x)$ una diferencia entre la solución del problema (6) y la solución del problema (5) sobre la red ω. Hallemos la ecuación a la cual debe satisfacer la función de red $z(x)$. Sustituyendo $y(x) = z(x) + u(x)$ en la (6), hallamos

$$z_{i+1} - 2z_i + z_{i-1} = -h^2\varphi_i - (u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}). \qquad (13)$$

Multiplicando la (13) por h^{-2}, obtenemos

$$L_h z = -(\varphi + L_h u), \text{ donde } L_h z = z_{\bar{x}x}. \qquad (14)$$

Comparemos la expresión incluida entre paréntesis en el segundo miembro de la (14) con la definición del error de aproximación (12) introducida anteriormente. La comparación muestra que la expresión señalada de la (14) coincide con la función $\psi(x)$ de la (12) al tomar la solución del problema inicial (5) como función $v(x)$ en la (12). Si dicha expresión (14) se toma como determinación del error de aproximación, la cuestión de la lisura de la función $v(x)$ en la determinación $\psi(x)$ deja de ser actual por sí misma.

Pues, sea que tengamos una ecuación diferencial

$$Lu = -f(x) \qquad (15)$$

la cual se aproxima por la ecuación en diferencias

$$L_h y = -\varphi(x) \qquad (16)$$

en una red Ω. Analicemos la discrepancia $\psi(x) = L_h u + \varphi(x)$, $x \in \Omega$, donde u es la solución de la ecuación (15).

Convenimos de que la función $\psi(x)$ es el *error de aproximación de la ecuación* (15) por la ecuación en diferencias (16), si el operador en diferencias L_h aproxima al operador diferencial L en las funciones suficientemente lisas.

En adelante se dirá que la ecuación en diferencias (16):

1) *aproxima la ecuación diferencial* (15) *por la norma* $\|\cdot\|$, si $\|\psi\| = \|L_h u + \varphi\| \to 0$ para $h \to 0$;

2) *aproxima una ecuación diferencial con el orden* n $(n > 0)$, si $\|\psi\| = O(h^n)$ ó $\|\psi\| \leqslant Mh^n$, donde $M = \text{const} > 0$ y no depende de h.

Partiendo de la nueva definición del error de aproximación de los esquemas en diferencias, verifiquemos el orden del error de los es-

quemas (6) y (7), suponiendo que la solución de la ecuación (5) es suficientemente lisa.

Para el esquema (6)

$$\psi = L_h u + \varphi = u_{\bar{x}x} + f = u'' + \frac{h^2}{12} u^{IV} + f + O(h^4) = O(h^2).$$

Para el esquema (7)

$$\psi = L_h u + \bar{\varphi} = u_{\bar{x}x} + f + \frac{h^2}{12} f'' = u'' + \frac{h^2}{12} u^{IV} + f + \frac{h^2}{12} f'' + $$
$$+ O(h^4) = (u'' + f) + \frac{h^2}{12} (u'' + f)'' + O(h^4) = O(h^4),$$

puesto que $u'' + f(x) = 0$.

Por lo tanto, si la solución del problema (5) es $u(x) \in C^{(4)}$, entonces el error de aproximación del esquema (6) es $O(h^2)$; si la solución del problema (5) es $u(x) \in C^{(6)}$, en tal caso el error de aproximación del esquema (7) es $O(h^4)$. La elevación del orden del error de aproximación del esquema (7) en comparación con el esquema (6) está relacionada con que el error de aproximación se investiga en la solución del problema (5) y no en una función arbitraria $v(x)$.

Como es evidente, los errores de aproximación de los problemas (6) y (7) en total (teniendo en cuenta los errores de aproximación de las condiciones de frontera) serán los mismos, debido a que las condiciones de frontera se aproximan con exactitud.

Calculemos el error de aproximación del problema (8) por los problemas (9) y (10). Está claro que los errores de aproximación de las ecuaciones de (9) y de (10) serán las magnitudes $O(h^2)$, ya que éstos no difieren de la aproximación del problema (6). Investiguemos el error de aproximación de la condición de frontera en el punto $x = 0$.

Para el esquema (9)

$$\psi_\nu = u_{x,0} - \varkappa u_0 + g_0 = u'(0) + \frac{h}{2} u''(0) - \varkappa u(0) + g_0 + O(h^2) = O(h).$$

Para el esquema (10)

$$\psi_\nu = u_{x,0} - \varkappa u_0 + \left(g_0 + \frac{h}{2} f(0)\right) =$$
$$= u'(0) + \frac{h}{2} u''(0) - \varkappa u(0) + g_0 + \frac{h}{2} f(0) + O(h^2) =$$
$$= (u'(0) - \varkappa u(0) + g_0) + \frac{h}{2} (u''(0) + f(0)) + O(h^2) = O(h^2),$$

porque

$$u'(0) = \varkappa u(0) - g_0, \quad u'' + f = 0.$$

De nuevo la elevación del orden del error de aproximación está ligada con que la condición de frontera se aproxima en la solución del problema (8).

Como ya se ha señalado anteriormente, una de las cuestiones principales de la teoría de los esquemas en diferencias es la cuestión de la velocidad de convergencia de la solución del problema en diferencias a la solución del problema inicial.

Sea que para cierta ecuación diferencial está planteado el problema de contorno

$$Lu = -f(x), \quad lu = -g(x). \tag{17}$$

El problema (17) en cierta red en diferencias $\bar{\omega}$ está aproximado por el problema en diferencias

$$L_h y = -\varphi(x), \; x \in \omega, \quad l_h y = -\nu(x), \; x \in \gamma, \tag{18}$$

donde ω es el conjunto de los nodos interiores de la red $\bar{\omega}$ y γ, el conjunto de los nodos de frontera, además $\bar{\omega} = \omega \cup \gamma$. Se dice que la solución del problema en diferencias (18):

1) *converge* a la solución del problema inicial sobre la red ω en el sentido de la norma $\|\cdot\|_{(1_h)}$, si

$$\|y-u\|_{(1_h)} \to 0 \text{ para } h \to 0;$$

2) *converge* a la solución del problema inicial desde el punto de vista de la norma $\|\cdot\|_{(1_h)}$ *con la velocidad* $O(h^n)$, $n > 0$, si $\|y-u\|_{(1_h)} = O(h^n)$ (o sea $\|y-u\|_{(1_h)} \leqslant Mh^n$, donde M es una constante positiva independiente de h).

4. Estabilidad de los esquemas en diferencias. Más arriba hemos conocido los conceptos de aproximación y de convergencia del esquema. Conviene subrayar una vez más lo siguiente: el error de aproximación se considera no sobre una red fija, sino en una sucesión de las redes $\{\omega_h\}$. Por eso se puede considerar que anteriormente en todas partes se trataba no de la solución de un problema en diferencias aislado, sino de una sucesión $\{y^h\}$ de las soluciones del problema en diferencias, la cual depende de la elección de las redes. Aquí h es el parámetro que caracteriza a la red. Si la red es unidimensional y uniforme, h es el número (o el paso) de la red. En caso general h es el vector que tiene la norma $|h| > 0$.

Para acotar la convergencia del esquema se debe investigar la convergencia de la sucesión $\{z^h = y^h - u^h\}$ para $|h| \to 0$, donde u^h es la proyección de la solución exacta $u = u(x)$ del problema inicial sobre el espacio de las funciones de red preestablecidas en la red ω_h.

Uno de los conceptos fundamentales de la teoría de los esquemas en diferencias es el de estabilidad de un esquema en diferencias.

Sea dado cierto esquema

$$L_h y^h = -\varphi^h(x), \quad l_h y^h = -\nu^h(x)$$

y su error de aproximación es

$$\psi^h = L_h u^h + \varphi^h, \quad \psi_\gamma^h = l_h u^h + \nu^h.$$

Suponiendo que $u = u(x)$ tiene un número suficiente de derivadas, se puede obtener el desarrollo asintótico de ψ^h y ψ_γ^h respecto a $|h|$. En calidad de $u = u(x)$ es natural eligir la solución del problema inicial para la ecuación diferencial. No obstante, no es suficiente conocer el orden de aproximación para juzgar de la calidad del esquema. Es necesario acotar la exactitud del esquema, o sea, el orden de error $z^h = y^h - u^h$. Esta acotación se puede obtener, si el esquema es estable.

Demos la definición de la estabilidad de un esquema.

Sean y_1^h e y_2^h las soluciones de los problemas (18) con los segundos miembros φ_1^h, ν_1^h y φ_2^h, ν_2^h, respectivamente. El esquema (18) se llama *estable*, si existen tales constantes positivas M_1, M_2 y h_0 independientes de la red ω_h (del parámetro vectorial h) y de la elección de los segundos miembros, que, siendo $|h| \leqslant h_0$, es justa la desigualdad

$$\| y_2^h - y_1^h \|_{(1_h)} \leqslant M_1 \| \varphi_2^h - \varphi_1^h \|_{(2_h)} + M_2 \| \nu_2^h - \nu_1^h \|_{(3_h)}, \tag{19}$$

donde $\|\cdot\|_{(1_h)}$, $\|\cdot\|_{(2_h)}$, $\|\cdot\|_{(3_h)}$ son ciertas normas introducidas en el conjunto de las funciones de red indicadas en la red ω_h. La estabilidad del esquema en diferencias significa que la solución $\{y^h\}$ del problema (18) depende uniformemente por h sin discontinuidades de los segundos miembros (o sea, los datos iniciales) $\{\varphi^h, \nu^h\}$, y, por consiguiente, a un cambio pequeño de los datos iniciales corresponde un cambio pequeño de la resolución.

Si el esquema (18) es resoluble para cualesquiera segundos miembros admisibles (datos iniciales) $\{\varphi^h, \nu^h\}$ y estable, en tal caso se dice que el problema en diferencias (18) está planteado de una manera *correcta* o que el esquema es correcto. Si el esquema es correcto, entonces tiene la solución única. En efecto, supongamos que existen dos soluciones y_1^h e y_2^h del problema (18) las cuales corresponden a los mismos datos iniciales $\{\varphi^h, \nu^h\}$, así que $\varphi_1^h = \varphi_2^h = \varphi^h$, $\nu_1^h = \nu_2^h = \nu^h$. Entonces, de la (19) se desprende:

$$\| y_2^h - y_1^h \|_{(1_h)} \leqslant M_1 \| 0 \|_{(2_h)} + M_2 \| 0 \|_{(3_h)} = 0, \quad \text{es decir,} \quad y_1^h \equiv y_2^h.$$

Al definir la estabilidad (19) no se supuso que las ecuaciones (18) eran lineales. Supongamos que el esquema (18) es lineal. En tal caso $y^h \equiv 0$ es la solución del problema, siendo $\varphi^h = \nu^h \equiv 0$. Tomando en la (19), $y_1^h = y^h$, $\varphi_1^h = \varphi^h$, $\nu_1^h = \nu^h$ e $y_2^h = \varphi_2^h = \nu_2^h = 0$, vemos que la estabilidad del esquema lineal significa el cumplimiento de la acotación apriorística

$$\| y^h \|_{(1_h)} \leqslant M_1 \| \varphi^h \|_{(2_h)} + M_2 \| \nu^h \|_{(3_h)}. \tag{20}$$

En este libro analizamos sólo los esquemas lineales. El estudio de la estabilidad del esquema en diferencias (18) se reduce prácticamente a la obtención de una acotación apriorística de forma (20).

Si el esquema es estable, no es difícil obtener la acotación del error de la solución

$$z^h(x) = y^h(x) - u^h(x),$$

donde $y^h(x)$ es la solución del problema (18) y $u = u(x)$ es la solución del problema inicial (17), mediante el error de aproximación:

$$\psi^h(x) = L_h u^h + \varphi^h, \quad x \in \omega_h; \quad \psi_\gamma^h = l_h u^h + \nu^h, \quad x \in \gamma_h.$$

En efecto, la solución $u = u(x)$ satisface las condiciones

$$L_h u^h = -(\varphi^h - \psi^h), \quad l_h u^h = -(\nu^h - \psi_\gamma^h).$$

Luego, tomando $y_1^h = y^h$, $\varphi_1^h = \varphi^h$, $\nu_1^h = \nu^h$, $y_2^h = u^h$, $\varphi_2^h = \varphi^h - \psi^h$, $\nu_2^h = \nu^h - \psi_\gamma^h$ y empleando la acotación (19), que expresa la estabilidad del esquema (18), obtenemos

$$\| y^h - u^h \|_{(1_h)} \leqslant M_1 \| \psi^h \|_{(2_h)} + M_2 \| \psi_\gamma^h \|_{(3_h)}. \qquad (21)$$

En el caso de un esquema lineal para el error z^h obtenemos el problema

$$L_h z^h = -\psi^h, \quad x \in \omega, \quad l_h z^h = -\psi_\gamma^h, \quad x \in \gamma,$$

que es análogo al problema (18); para el problema señalado se puede obtener la acotación (21), empleando inmediatamente la (19).

De la acotación (21) se deduce la conclusión: si el esquema (18) es estable y aproxima el problema (17), en tal caso dicho esquema converge para $|h| \to 0$. En realidad, $\| y^h - u^h \|_{(1_h)} \to 0$ para $|h| \to 0$, si $\| \psi^h \|_{(2_h)} \to 0$ y $\| \psi_\gamma^h \|_{(3_h)} \to 0$ para $|h| \to 0$.

De la acotación (21) resulta que el orden de precisión del esquema (18) se determina a base del orden de aproximación. Para que el esquema converja, por ejemplo con la velocidad $O(|h|^m)$, $m > 0$ (tenga la exactitud $O(|h|^m)$), es suficiente que éste tenga una aproximación (en la solución $u = u(x)$ del problema (17)) del mismo orden, es decir,

$$\| \psi^h \|_{(2_h)} = O(|h|^m), \quad \| \psi_\gamma^h \|_{(3_h)} = O(|h|^m).$$

La demostración de la estabilidad de los esquemas se reduce a la obtención de las acotaciones apriorísticas (19) ó (20). En los capítulos III, V y VI se obtendrán las acotaciones de este tipo con normas diferentes $\| \cdot \|_{(\alpha_h)}$, $\alpha = 1, 2, 3$, para los esquemas en diferencias que aproximan las ecuaciones elíplicas del segundo y del cuarto

órdenes. Así, por ejemplo, en el capítulo III la estabilidad se estudia con auxilio del principio de máximo y las acotaciones apriorísticas contienen las normas de red C:

$$\| y^h \|_{(1_h)} = \max_{x \in \omega_h} | y^h(x) |, \quad \| \nu^h \|_{(3_h)} = \max_{x \in \gamma} | \nu^h(x) |,$$
$$\| \varphi^h \|_{(2_h)} = \| \varphi^h \|_{(1_h)}.$$

§ 2. Principios de construcción de los esquemas en diferencias

1. Exigencias presentadas a los esquemas en diferencias. En el párrafo anterior fueron citados los ejemplos de las aproximaciones en diferencias para los operadores diferenciales del primero y del segundo órdenes y para las ecuaciones diferenciales del segundo orden con las condiciones de frontera que contienen primera derivada. Hemos analizado los ejemplos elementales.

En el caso de ecuaciones diferenciales con coeficientes variables el problema de construcción de los esquemas en diferencias se complica esencialmente. En un modelo preestablecido se puede construir una infinidad de los esquemas equivalentes por el orden de aproximación. Así, por ejemplo, para la ecuación diferencial

$$\frac{d^2u}{dx^2} - q(x)\, u = -f(x) \tag{1}$$

se puede construir en el modelo de tres puntos (x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) la familia de esquemas de un parámetro

$$L_h y_i = \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} - d_i y_i = -f_i, \tag{2}$$
$$d_i = \alpha q_{i-1} + (1 - 2\alpha)\, q_i + \alpha q_{i+1}, \quad q_i = q(x_i),$$

que tienen, con cualquier valor del parámetro α, el segundo orden de aproximación $\psi = L_h u + f = O(h^2)$. Al coeficiente d_i de y_i en la fórmula (2) se puede añadir, sin perturbar el orden de aproximación, un sumando βh^2, donde β es un número arbitrario. De esta forma, surge el problema de elegir los esquemas en diferencias entre un conjunto de los esquemas admisibles preestablecidos en cierto modelo y que tienen un mismo orden de aproximación. Para ello es necesario formular las exigencias las cuales se deben presentar a los esquemas en diferencias. Cualquier método aproximado debe dar la posibilidad de hallar la solución numérica del problema con una exactitud indicada ε durante un número finito de operaciones $Q(\varepsilon)$ (o sea, durante el tiempo finito de máquina). Naturalmente, se procura minimizar la cantidad de las operaciones $Q(\varepsilon)$, es decir, hallar el método numérico económico.

La resolución numérica de un problema de la física matemática consta de dos etapas: a) la de escribir el sistema de ecuaciones de red (del esquema en diferencias) las cuales aproximan el problema para la ecuación diferencial, b) la resolución de este sistema de ecuaciones de red.

En este libro nos ocupamos sólo de la construcción de los esquemas en diferencias. No obstante, con todo esto debemos tener presente también el volumen de la labor de cálculo, la cual tenemos que realizar para hallar la solución de red y la cual depende tanto de la estructura del sistema de ecuaciones de red, como del orden del sistema.

Con el método fijado de resolución del sistema el volumen de los cálculos es tanto menor, cuanto más bajo es el orden del sistema (cuanto más grande es el paso de la red). Mas la disminución del número de los nodos de la red conduce a la disminución de la exactitud del esquema. Por esta razón sería deseable tener un esquema con el orden posiblemente más elevado de la precisión (el cual depende de la lisura de los coeficientes de la ecuación diferencial, de las condiciones iniciales y de contorno). En la práctica esto quiere decir que se debe buscar los esquemas con el modelo mínimo los cuales tienen en este modelo el orden máximo posible de aproximación en el caso de las resoluciones suficientemente lisas de la ecuación diferencial. Se debe preestablecer la familia inicial de los esquemas en el modelo elegido y en esta familia buscar los esquemas «óptimos» desde cierto punto de vista. El término «esquema óptimo» carece de la definición. Hace falta plantear las exigencias al esquema las cuales determinen, como se suele decir, la calidad del esquema.

Es necesario señalar las características del esquema no sólo cualitativas, sino también cuantitativas:

a) El esquema debe ser homogéneo, es decir, las ecuaciones de red para cualquier problema de la clase en cuestión K y para cualquier red en cada uno de los nodos se deben escribir uniformemente, según una misma ley. La clase de los problemas K se determina preestableciendo la ecuación diferencial y el espacio funcional, al cual han de pertenecer los coeficientes de la ecuación.

b) El sistema de ecuaciones en diferencias debe ser resoluble en cualquier red admisible y para cualquier problema de la clase en cuestión K.

c) El esquema debe convergir para todo problema de la clase mencionada K.

Estas exigencias determinan la familia inicial de los esquemas admisibles de diferencias.

Luego presentemos a los esquemas las exigencias complementarias:

1) de un orden determinado de aproximación (por ejemplo, $\psi = O(h^2)$ en el conjunto $\overline{K} \subseteq K$ de las soluciones lisas),

2) del orden máximo de exactitud en toda la clase K de los problemas,

3) de economía, es decir, del mínimo de las operaciones al resolver a máquina el sistema de ecuaciones de red.

Destaquemos de la familia de esquemas inicial cierto conjunto de «los esquemas óptimos». Es que la búsqueda de dichos esquemas es el objeto de la teoría. A continuación nos detengamos más a fondo en el concepto de homogeneidad de los esquemas en diferencias.

2. **Esquemas homogéneos en diferencias.** Analicemos el caso de funciones con una variable. Sea

$$\omega_h = \{x_i = ih,\ i = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots\}$$

una red en el eje numérico $-\infty < x < \infty$, $k(x)$ es la función-vector de los coeficientes de la ecuación diferencial. Así, por ejemplo, para la ecuación

$$\frac{d}{dx}\left(k_1(x)\frac{du}{dx}\right) - k_2(x)\,u = -k_3(x)$$

es evidente que el vector

$$k(x) = \{k_1(x),\ k_2(x),\ k_3(x)\}$$

tiene las componentes $k_1(x)$, $k_2(x)$ y $k_3(x)$.

La *homogeneidad* de un esquema significa que sus coeficientes son funcionales de los coeficientes de la ecuación diferencial, las cuales dependen del paso h como de un parámetro y son independientes del nodo de la red y de la elección de los coeficientes $k(x)$.

Sean dados un modelo de números enteros

$$M = \{-m_1,\ -m_1 + 1,\ \ldots\ -1,\ 0,\ 1,\ \ldots,\ m_2\},$$

donde $m_1 > 0$ y $m_2 > 0$ son números enteros, en el cual se determina la función de red $\overline{y}(j)$, $j \in M$, y un modelo $\Sigma = \{-m_1 \leqslant s \leqslant m_2\}$, en el cual está definida la función-vector $\overline{k}(s)$ (para sencillez consideramos que los extremos de los modelos M y Σ coinciden).

Designemos por $A_j^h[\overline{k}(s)]$, $F^h[\overline{k}(s)]$, $j \in M$, $s \in \Sigma$ las *funcionales de modelo*.

Se examina la funcional

$$\Phi^h[\overline{y}(j)] = \sum_{j=-m_1}^{m_2} A_j^h[\overline{k}(s)]\,\overline{y}^h(j) + F^h[\overline{k}(s)]$$

y de ésta se realiza el paso al esquema homogéneo. Suponiendo que

$$\overline{y}(j) = y^h(x_i + jh),\quad \overline{k}(s) = k(x_i + sh)$$

y empleando la expresión para Φ^h, obtenemos el esquema en diferencias homogéneo

$$(L_h y^h + F^h)_i = \sum_{j=-m_1}^{m_2} A_j^h [k(x_i + sh)]\, y^h(x_i + jh) + F^h [k(x_i + sh)] = 0,$$

donde $y^h(x_i)$ es la función de red y $k(x)$, la función-vector del argumento continuo x.

Una familia de esquemas homogéneos está dada, si están indicadas las funcionales de modelo

$$A_j^h [\bar{k}(s)] \quad \text{y} \quad F^h [\bar{k}(s)], \qquad j = -m_1, \ -m_1 + 1, \ \ldots, \ m_2.$$

La arbitrariedad de su elección se debe limitar por las exigencias de solubilidad, de aproximación de un orden determinado, de economía del esquema.

Ilustremos el concepto de homogeneidad en el ejemplo de esquemas de tres puntos para el problema

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) - q(x)u = -f(x), \qquad 0 < x < 1, \qquad (3)$$
$$u(0) = \mu_1, \qquad u(1) = \mu_2,$$

donde $k(x) > 0$ y $q(x) \geqslant 0$.

Examinemos el modelo de tres puntos $(x_{i-1}, \ x_i, \ x_{i+1})$ en la red $\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, \ i = 0, 1, \ldots, N, \ h = 1/N\}$, así que el modelo $M = \{-1, 0, 1\}$ y $m_1 = m_2 = 1$. Sea $\sum = \{-1 \leqslant s \leqslant 1\}$ el modelo de coeficiente; $A^h[\bar{k}(s)]$, $B^h[\bar{k}(s)]$, $F^h[\bar{k}(s)]$, $-1 \leqslant s \leqslant 1$, son funcionales de modelo.

Analicemos un esquema en diferencias homogéneo

$$\frac{1}{h}\left[b_i \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - a_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h}\right] - d_i y_i = -\varphi_i,$$
$$i = 1, \ 2, \ \ldots, \ N-1, \qquad (4)$$
$$y_0 = \mu_1, \quad y_N = \mu_2,$$

cuyos coeficientes se determinan en todos los nodos $x_i \in \omega$ y para cualesquier $k(x)$, $q(x)$ y $f(x)$ de la misma manera:

$$\begin{aligned} a_i &= A^h [k(x_i + sh)], \quad & b_i &= B^h [k(x_i + sh)], \\ d_i &= F^h [q(x_i + sh)], \quad & \varphi_i &= F^h [f(x_i + sh)]. \end{aligned} \qquad (5)$$

Para simplicidad hemos supuesto (véase (5)) que cada uno de los coeficientes de la ecuación en diferencias depende sólo del coeficiente correspondiente de la ecuación diferencial. En caso general A^h, B^h y F^h son funcionales no lineales.

Sea $u(x)$ la solución del problema (3). El error de aproximación para el esquema (4) se determina como discrepancia

$$\psi_i = \frac{1}{h}\left[b_i \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - a_i \frac{u_i - u_{i-1}}{h}\right] - d_i u_i + \varphi_i \qquad (6)$$

Suponiendo que la lisura de $u(x)$ es suficiente, desarrollando $u_{i\pm 1}$ por las potencias de h y designando por $\rho_i(h)$ las expresiones cualesquiera que dependen de x_i y tienden a cero para $h \to 0$, obtendremos

$$u_{i+1} = u_i + hu \ + \frac{h^2}{2}u_i'' + h^2\rho_i(h),$$

$$u_{i-1} = u_i - hu \ + \frac{h^2}{2}u_i'' + h^2\rho_i(h),$$

$$\psi_i = \frac{b_i + a_i}{2}u_i'' + \frac{b_i - a_i}{h}u_i' - d_i u_i + \varphi_i + \rho_i(h).$$

Comparándolo con la ecuación

$$ku'' + k\ u \ - qu + \varphi = ($$

vemos que

$$\psi_i = \left(\frac{b_i + a_i}{2} - k_i\right)u_i'' + \left(\frac{b_i - a_i}{h} \quad k\ \right)u \ - (d_i - q_i)u_i + \varphi_i \quad f_i + \rho_i(h),$$

o sea,

$$\psi_i = \rho_i(h) \to 0 \text{ para } h \to 0,$$

si están cumplidas las condiciones

$$\frac{b_i + a_i}{2} = k_i + \rho_i(h), \qquad \frac{b_i - a_i}{h} = k \ + \rho_i(h), \qquad (7)$$

$$d_i = q_i + \rho_i(h), \quad \varphi_i = f_i + \rho_i(h).$$

En lo sucesivo presuponemos que las funcionales de modelo A, B y F son lineales y no dependen del parámetro h. Valiéndonos de los desarrollos

$$k(x + sh) = k(x) + shk'(x) + h\rho(h), \quad q(x + sh) = q(x) + \rho(h),$$
$$f(x + sh) = f(x) + \rho(h),$$

hallaremos

$$a_i = A[1]\,k_i + hk\,A[s] + h\rho(h),$$
$$b_i = B[1]\,k_i + hk\,B[s] + h\rho(h),$$
$$d_i = F[1]\,q_i + \rho(h), \quad \varphi_i = F[1]\,f_i + \rho(h).$$

Sustituyendo estas expresiones en las condiciones (7), hallaremos

$$A[1] = B[1] = F[1] = 1, \quad B[s] - A[s] = 1. \qquad (8)$$

Si estas condiciones están cumplidas, entonces el esquema (4) posee aproximación, o sea, $\psi = \rho(h) \to 0$ para $h \to 0$.

La exigencia de la aproximación del segundo orden para el esquema (4) conduce a las condiciones

$$\frac{b_i+a_i}{2} = k_i + O(h^2), \qquad \frac{b_i-a_i}{h} = k_i' + O(h^2),$$
$$d_i = q_i + O(h^2), \qquad \varphi_i = f_i + O(h^2). \tag{9}$$

De esto se puede averiguar sustituyendo

$$u_{i\pm1} = u_i \pm hu_i' + \frac{h^2}{2}u_i'' \pm \frac{h^3}{6}u_i''' + \frac{h^4}{24}u_i^{\mathrm{IV}} + h^4\rho(h)$$

en la expresión para ψ_i y haciendo que $\psi_i = O(h^2)$. Por analogía con los razonamientos efectuados anteriormente, se puede mostrar que de la (9), además de la (8), se deducen las condiciones

$$B[s^2] = A[s^2], \qquad F[s] = 0. \tag{10}$$

La exigencia de solubilidad del sistema de las ecuaciones en diferencias (4), el cual volvamos a escribir en la forma

$$a_iy_{i-1} - c_iy_i + b_iy_{i+1} = -h^2\varphi_i,\ 0 < i < N,\ y_0 = \mu_1,\ y_N = \mu_2,$$
$$c_i = a_i + b_i + h^2d_i, \tag{11}$$

está cumplida, si

$$a_i > 0,\ b_i > 0,\ c_i - (a_i + b_i) = h^2d_i \geqslant 0 \tag{12}$$

para todos los $i = 1, 2, \ldots, N-1$. En este caso, como se sabe, la solución de y_i se puede hallar según el método de repasado. Puesto que $k(x) > 0$ y $q(x) \geqslant 0$, es suficiente exigir que las funcionales A, B y F sean positivas, es decir,

$$A[\bar{k}(s)] > 0, \qquad B[\bar{k}(s)] > 0, \quad F[\bar{k}(s)] > 0, \qquad \text{siendo } \bar{k}(s) > 0.$$

En este caso $a_i > 0$, $b_i > 0$ y $d_i \geqslant 0$ para cualesquier $k(x) > 0$ y $q(x) \geqslant 0$.

En el caso más sencillo A, B (y F) son combinaciones lineales de los valores de las funciones $\bar{k}(s)$ ($(\bar{f}(s))$ en un número finito de los puntos del modelo $\sum = \{-1 \leqslant s \leqslant 1\}$, por ejemplo,

$$A[\bar{k}(s)] = \alpha_{-1}\bar{k}(-1) + \alpha_0\bar{k}(0) + \alpha_1\bar{k}(1),$$
$$B[\bar{k}(s)] = \beta_{-1}\bar{k}(-1) + \beta_0\bar{k}(0) + \beta_1\bar{k}(1), \tag{13}$$

etc., así que

$$a_i = \alpha_{-1}k_{i-1} + \alpha_0k_i + \alpha_1k_{i+1}, \quad b_i = \beta_{-1}k_{i-1} + \beta_0k_i + \beta_1k_{i+1} \tag{14}$$

(si $k(s)$ es una función continua). Las condiciones de solubilidad (12) están cumplidas, siendo

$$\alpha_j \geqslant 0, \ \beta_j \geqslant 0 \text{ para } j = -1, 0, 1. \tag{15}$$

Las condiciones de aproximación (8) nos dan

$$\alpha_{-1} + \alpha_0 + \alpha_1 = 1, \ \beta_{-1} + \beta_0 + \beta_1 = 1, \ \beta_1 - \beta_{-1} = \\ = 1 + \alpha_1 - \alpha_{-1}. \tag{16}$$

De las condiciones de la normación $\alpha_{-1} + \alpha_0 + \alpha_1 = 1$ y $\alpha_j \geqslant 0$ se desprende que $0 \leqslant \alpha_j \leqslant 1$ y análogamente

$$0 \leqslant \beta_j \leqslant 1, \quad j = -1, 0, 1. \tag{17}$$

Comprobemos ahora las condiciones del segundo orden de aproximación (10). Como $A[s^2] = \alpha_{-1} + \alpha_1$, $B[s^2] = \beta_{-1} + \beta_1$, entonces

$$\beta_1 + \beta_{-1} = \alpha_1 + \alpha_{-1}, \quad \text{ó} \quad \beta_0 = \alpha_0. \tag{18}$$

Para los seis parámetros α_j, β_j, $j = -1, 0, 1$, hemos obtenido 4 condiciones; los dos parámetros α_1 y α_{-1} quedan arbitrarios y $\alpha_0 = 1 - (\alpha_1 + \alpha_{-1})$, $\beta_{-1} = \alpha_{-1} - 0{,}5$, $\beta_1 = 0{,}5 + \alpha_1$, $\beta_0 = \alpha_0$.

3. Esquemas en diferencias conservadores. Además de las exigencias formales de solubilidad, aproximación de cierto orden y economía del algoritmo de cálculo, cuyo cumplimiento se verifica inmediatamente, es necesario asegurar, al elegir el esquema, la exigencia más importante, que es la de convergencia del esquema con una velocidad determinada al tender a cero el paso de la red. Esta propiedad no siempre es fácil de establecer de la misma manera, particularmente en el caso de ecuaciones con coeficientes discontinuos y de ecuaciones no lineales.

En el § 1 fue mostrado que la convergencia de un esquema en diferencias es la consecuencia de la estabilidad y aproximación: si un esquema es estable y posee aproximación, este esquema converge. Recordamos que la estabilidad expresa la propiedad de dependencia continua (uniformemente continua con relación a la elección de las redes) de la resolución del problema en diferencias respecto al segundo miembro de la ecuación y a las condiciones de frontera.

En el caso del primer problema de contorno para el error $z = y - u$, donde u es la solución del problema inicial para la ecuación diferencial e y es la solución del problema en diferencias correspondiente, obtenemos una ecuación heterogénea cuyo segundo miembro es el error de aproximación, en tanto que las condiciones de contorno son homogéneas. Si un esquema es estable, entonces z se acota mediante ψ, y de esta acotación se desprende la convergencia cuando existe una aproximación en la sucesión de las redes que se condensan. No obstante, el conocimiento de tal propiedad asintótica

del esquema, como es la convergencia, no es suficiente para la apreciación apriorística de la magnitud del error en las redes fijas, empleadas en práctica para los cálculos a máquina. Estas redes reales, en virtud de la exigencia de economía del algoritmo de cálculo, no pueden ser de pasos demasiado frecuentes. Por lo tanto las acotaciones apriorísticas señaladas más arriba de tipo

$$\| z \|_{(1} \leqslant M \| \psi \|_{(2)} \leqslant \overline{M} h^2$$

son muy aproximadas; además éstas contienen las acotaciones para las derivadas (por ejemplo, de cuatro orden) de la solución buscada $u(x)$. Para obtener una aproximación buena en las redes reales, hace falta, como revela la práctica, utilizar los esquemas que reflejan bien las propiedades fundamentales de las ecuaciones diferenciales.

Las ecuaciones de la Física Matemática expresan, como regla general, las *leyes de conservación* (de la energía, del calor, de la masa, de la carga, etc.) en la forma diferencial. Así, por ejemplo, la ecuación

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) = -f(x), \quad 0 < x < 1, \tag{19}$$

se puede interpretar como ecuación para la distribución estacionaria (que no altera con el tiempo) de la temperatura $u = u(x)$ en el vástago $0 < x < 1$ con el coeficiente de conductibilidad térmica $k(x)$. Integrando esta ecuación respecto a x entre los límites $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$, obtendremos la ley de conservación del calor en el segmento $x^{(1)} \leqslant x \leqslant x^{(2)}$

$$W(x^{(2)}) - W(x^{(1)}) = \int_{x^{(1)}}^{x^{(2)}} f(x)\,dx, \quad W(x) = -k(x)\frac{du}{dx}. \tag{20}$$

A la izquierda tenemos la deferencia de los flujos caloríficos en los extremos del segmento y a la derecha, la cantidad del calor desprendido (o absorbido).

Para describir correctamente la marcha de un proceso físico con auxilio del modelo discreto es natural tenderse a que dicho modelo represente correctamente en la red las propiedades fundamentales de este proceso, ante todo tales como son las leyes de conservación. A los esquemas en diferencias los cuales expresan las leyes de conservación en una red los llamaremos esquemas en diferencias *conservadores*. Esclarecemos el significado del conservadurismo en el ejemplo del esquema de tres puntos (4) para la ecuación

$$(k(x)u')' = -f(x), \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = \mu_1, \quad u(1) = \mu_2.$$

Este esquema tiene la forma

$$\frac{1}{h}\left(b_i \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - a_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h}\right) = -\varphi_i. \tag{21}$$

Anotándolo de otro modo:

$$\frac{1}{h}\left(a_{i+1}\frac{y_{i+1}-y_i}{h}-a_i\frac{y_i-y_{i-1}}{h}\right)=-\varphi_i-\frac{b_i-a_{i+1}}{h}\,\frac{y_{i+1}-y_i}{h},$$

nos cercioramos de que el análogo de red de la identidad (20) en el segmento $x^{(1)}=i_1h\leqslant x\leqslant x^{(2)}=i_2h$ es la identidad

$$W^h_{i_2+1}-W^h_{i_1}=\sum_{i=i_1}^{i_2}h\varphi_i+\sum_{i=i_1}^{i_2}(b_i-a_{i+1})\frac{y_{i+1}-y_i}{h}, \qquad (22)$$

donde

$$W^h_i=-a_i\frac{y_i-y_{i-1}}{h}.$$

El segundo miembro contiene la magnitud de desequilibrio

$$D=\sum_{i=i_1}^{i_2}(b_i-a_{i+1})\frac{y_{i+1}-y_i}{h},$$

la cual se anulará para cualesquier funciones de red y_i sólo cuando

$$b_i=a_{i+1}. \qquad (23)$$

En este caso obtenemos el esquema

$$\frac{1}{h}\left(a_{i+1}\frac{y_{i+1}-y_i}{h}-a_i\frac{y_i-y_{i-1}}{h}\right)=-\varphi_i \qquad (24)$$

y, en vez de la (22), una ley de red de conservación

$$W^h_{i_2+1}-W^h_{i_1}=\sum_{i=i_1}^{i_2}h\varphi_i,$$

que es un corolario algebraico de las ecuaciones en diferencias (24). El esquema (24) es conservador, mientras que la condición (23) es la condición necesaria y suficiente del conservadurismo. La propiedad de conservadurismo del esquema en diferencias en dicho caso coincide con la propiedad de autoconjugación del operador en diferencias

$$\Lambda y_i=\frac{1}{h}\left(a_{i+1}\frac{y_{i+1}-y_i}{h}-a_i\frac{y_i-y_{i-1}}{h}\right)$$

en el espacio de funciones de redes indicadas en la red

$$\omega_h=\{x_i=ih,\ i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N,\ h=1/N\}$$

e iguales a cero en su frontera (siendo $i=0,\ N$).

4. Conservadurismo como condición necesaria de la convergencia del esquema homogéneo en la clase de coeficientes discontinuos. Para justificar la necesidad de la exigencia de conservadurismo,

mostremos que el conservadurismo del esquema homogéneo de alguna familia es la condición necesaria de la convergencia de este esquema en la clase de coeficientes discontinuos, es decir, de la convergencia de un esquema se desprende su conservadurismo. Señalemos ante todo que por cuanto aquí se trata de una condición necesaria, se puede limitar al estudio de los esquemas para un problema elemental, por ejemplo,

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right)=0, \quad 0<x<1, \quad u(0)=1, \quad u(1)=0, \qquad (25)$$

donde $k(x)$ es una función constante por trozos

$$k(x)=\begin{cases} k_1, & 0<x<\xi, \\ k_2, & \xi<x<1. \end{cases}$$

En el punto de la discontinuidad $x=\xi$ se cumplen las condiciones corrientes de conjugación

$$[u]=u(\xi+0)-u(\xi-0)=0,$$
$$[ku']=k_2u'(\xi+0)-k_1u'(\xi-0)=0.$$

Es evidente que este problema tiene la solución en forma de una función lineal por trozos

$$u(x)=\begin{cases} 1-\gamma_0 x, & 0\leqslant x\leqslant\xi, \\ \delta_0(1-x), & \xi\leqslant x\leqslant 1, \end{cases} \qquad (26)$$

donde γ_0 y δ_0 se hallan a base de las condiciones de conjugación: $1-\gamma_0\xi=\delta_0(1-\xi)$, $k_1\gamma_0=k_2\delta_0$, así que

$$\delta_0=\frac{k_1}{k_2}\gamma_0, \quad \gamma_0=\frac{1}{\Delta_0}, \quad \Delta_0=\xi+\frac{k_1}{k_2}(1-\xi). \qquad (27)$$

Sea que $\xi=x_n+\theta h$, $0\leqslant\theta\leqslant 1$.

Consideremos el esquema en diferencias homogéneo correspondiente

$$\frac{1}{h}\left[b_i\frac{y_{i+1}-y_i}{h}-a_i\frac{y_i-y_{i-1}}{h}\right]=0,$$
$$i=1,\ 2,\ \ldots,\ N-1,\ y_0=1,\ y_N=0, \qquad (28)$$

donde

$$a_i=A[k(x_i+sh)], \quad b_i=B[k(x_i+sh)], \quad -1\leqslant s\leqslant 1.$$

Supongamos que el esquema (28) aproxima el problema (25); entonces se cumplen las condiciones (8)

$$B[1]=A[1]=i, \quad B[s]-A[s]=1.$$

Como $k(x)=k_1$ cuando $x\leqslant x_n$ y $k(x)=k_2$ cuando $x\geqslant x_{n+1}$, entonces $a_i=b_i=k_1$ cuando $0<i<n$ y $a_i=b_i=k_2$ cuando

$n+1<i<N$, en tal caso las ecuaciones en diferencias (28) se pueden escribir en la forma: $y_{i-1}-2y_i+y_{i+1}=0$ cuando $0<i<$ $<n$ y $n+1<i<N$, $y_0=1$, $y_N=0$,

$$b_n(y_{n+1}-y_n)-a_n(y_n-y_{n-1})=0,$$
$$b_{n+1}(y_{n+2}-y_{n+1})-a_{n+1}(y_{n+1}-y_n)=0.$$

De estas ecuaciones se deduce que $y_i=1-\gamma x_i$, siendo $0\leqslant i\leqslant n$, $y_i=\delta(1-x_i)$, siendo $n+1\leqslant i\leqslant N$, donde γ y δ son los coeficientes definibles a base de las mismas ecuaciones para $i=n$, $n+1$.

Eliminando de las ecuaciones la diferencia $y_{n+1}-y_n$, siendo $i=n$ y $i=n+1$, obtenemos

$$\delta=\frac{a_na_{n+1}}{b_nb_{n+1}}\gamma.$$

Sustituyamos esta expresión en la ecuación para $i=n$ y hallemos

$$\gamma=\frac{1}{ha_n/b_n+x_n+(1-x_{n+1})\,a_na_{n+1}/(b_nb_{n+1})}.$$

Con auxilio de la interpolación lineal determinamos en todos los puntos $x\in[0,1]$ la función

$$\tilde{y}(x,h)=y_i+\frac{x-x_i}{h}(y_{i+1}-y_i)\quad \text{para}\quad x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}.$$

Entonces tendremos

$$\tilde{y}(x,h)=\begin{cases}1-\gamma x & \text{para}\quad 0\leqslant x\leqslant \xi,\\ \delta(1-x) & \text{para}\quad \xi\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}\tag{29}$$

Supongamos que el esquema en diferencias converge en C; en tal caso

$$|\tilde{y}(x,h)-u(x)|\to 0,\quad \text{siendo}\quad h\to 0.$$

Comparando la expresión para $\tilde{y}(x,h)$ con la fórmula para $u(x)$, obtenemos: $\gamma\to\gamma_0$ y $\delta\to\delta_0$ cuando $h\to 0$. Pasando en la fórmula para γ al límite cuando $h\to 0$, vemos que $\lim\limits_{h\to 0}\gamma=\gamma_0$ solamente a la condición

$$R_n=\frac{b_nb_{n+1}}{k_2}-\frac{a_na_{n+1}}{k_1}\to 0\quad \text{cuando}\quad h\to 0.\tag{30}$$

Esta es la condición necesaria de la convergencia del esquema (28).

Preestablezcamos ahora una familia inicial de esquemas, al determinar las funcionales de modelo lineales A y B empleando la fórmula (14) del p. 2, así que

$$a_i=\alpha_{-1}k_{i-1}+\alpha_0k_i+\alpha_1k_{i+1},\quad b_i=\beta_{-1}k_{i-1}+\beta_0k_i+\beta_1k_{i+1}.\tag{14}$$

Destaquemos de esta familia de esquemas (lineales, «discretos») el conjunto de los esquemas convergentes en la clase de coeficientes discontinuos $k(x)$ y mostremos que son conservadores. Puesto que el esquema posee aproximación, los coeficientes α_k y β_k verifican las condiciones (16), las cuales para comodidad conviene escribir una vez más

$$\alpha_{-1} + \alpha_0 + \alpha_1 = 1, \quad \beta_{-1} + \beta_0 + \beta_1 = 1, \tag{31}$$

$$\beta_1 - \beta_{-1} = 1 + \alpha_1 - \alpha_{-1}. \tag{32}$$

Calculemos a_i, b_i, siendo $i = n, n + 1$:

$$a_n = (\alpha_{-1} + \alpha_0) k_1 + \alpha_1 k_2 = (1 - \alpha_1) k_1 + \alpha_1 k_2,$$

$$b_n = (1 - \beta_1) k_1 + \beta_1 k_2,$$

$$a_{n+1} = \alpha_{-1} k_1 + (\alpha_0 + \alpha_1) k_2 = \alpha_{-1} k_1 + (1 - \alpha_{-1}) k_2,$$

$$b_{n+1} = \beta_{-1} k_1 + (1 - \beta_{-1}) k_2.$$

Examinemos la diferencia R_n. Esta no depende de h, y por lo tanto la condición (30) se sustituye por la igualdad $R_n = 0$, cualquiera que sea h. Multiplicando R_n por k_1/k_2^2 y denotando $t = k_1/k_2$, obtenemos

$$t\,((1 - \beta_1)\, t + \beta_1)\,(\beta_{-1} t + (1 - \beta_{-1})) - \\ - ((1 - \alpha_1)\, t + \alpha_1)\,(\alpha_{-1} t + (1 - \alpha_1)) = 0$$

ó

$$(1 - \beta_1)\, \beta_{-1} t^3 + [\beta_1 \beta_{-1} + (1 - \beta_1)(1 - \beta_{-1}) - \alpha_{-1}(1 - \alpha_1)]\, t^2 + \\ + [\beta_1 (1 - \beta_{-1}) - \alpha_1 \alpha_{-1} - (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_{-1})]\, t - \alpha_1 (1 - \alpha_{-1}) = 0.$$

En virtud de la arbitrariedad de t todos los coeficientes de las potencias de t son iguales a cero:

$$(1 - \beta_1)\, \beta_{-1} = 0, \qquad (1 - \alpha_{-1})\, \alpha_1 = 0,$$

$$\beta_1 \beta_{-1} + (1 - \beta_1)(1 - \beta_{-1}) - \alpha_{-1}(1 - \alpha_1) = 0, \tag{33}$$

$$\beta_1 (1 - \beta_{-1}) - \alpha_1 \alpha_{-1} - (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_1) = 0.$$

Las dos últimas correlaciones son corolario de las condiciones (32) y (33). El sistema de ecuaciones (31) — (33), teniendo en cuenta la-restricciones (15), tiene una familia de un solo parámetro de solus ciones no negativas

$$\beta_{-1} = \alpha_1 = 0, \quad \alpha_{-1} = \beta_0 = 1 - \alpha_0, \quad \beta_1 = \alpha_0, \quad 0 \leqslant \alpha_0 \leqslant 1.$$

En efecto, sea $\alpha_1 = \beta_{-1} = 0$. Entonces, a base de (31) y (32) hallamos $\beta_1 = 1 - \alpha_{-1} = \alpha_0$, $\beta_0 = 1 - \beta_1 = 1 - \alpha_0$.

Suponiendo que $\beta_{-1} = 0$ y $\alpha_{-1} = 1$ y tomando en consideración las condiciones (15), obtendremos un caso particular de la solución anterior, el cual corresponde a $\alpha_0 = 0$. Del mismo modo se investigan

las demás soluciones del sistema (33). A base de la solución obtenida del sistema (31)—(33), (15) tenemos

$$a_i = (1-\alpha_0)\,k_{i-1} + \alpha_0 k_i, \quad b_i = (1-\alpha_0)\,k_i + \alpha_0 k_{i+1}, \tag{34}$$

es decir, $b_i = a_{i+1}$.

De esta manera, hemos mostrado que *si algún esquema de la familia inicial* (28), (14) *y* (15) *converge en la clase de coeficientes continuos a trozos, este esquema es conservador* y tiene la forma

$$\Lambda y = \frac{1}{h}\left(a_{i+1}\frac{y_{i+1}-y_i}{h} - a_i\frac{y_i-y_{i-1}}{h}\right) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1, \tag{35}$$

donde

$$a_i = (1-\alpha_0)\,k_{i-1} + \alpha_0 k_i, \quad 0 \leqslant \alpha_0 \leqslant 1,$$

α_0 es el parámetro arbitrario. Este esquema tiene evidentemente el primer orden de aproximación para cualquier α_0 y el segundo orden para $\alpha_0 = 0{,}5$, es decir, cuando $a_i = 0{,}5\,(k_{i-1} + k_i)$. El conservadurismo es la condición no sólo necesaria, sino también suficiente, de la convergencia en la clase de coeficientes discontinuos, para el esquema

$$\Lambda y_i = \frac{1}{h}\left[a_{i+1}\frac{y_{i+1}-y_i}{h} + a_i\frac{y_i-y_{i-1}}{h}\right] - d_i y_i = -\varphi_i,$$
$$i = 1, 2, \ldots, N-1, \; y_0 = \mu_1, \; y_N = \mu_2,$$

el que corresponde a la ecuación (3). En la demostración de la suficiencia no nos detenemos.

Aportemos como ejemplo un esquema no conservador, el cual se obtiene como resultado de la aproximación término por término con el segundo orden por h de la ecuación

$$Lu = (ku')' - qu = -ku'' + k'u' - qu = -f.$$

Una aproximación natural semejante engendra al esquema

$$k_i\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2} + \frac{k_{i+1}-k_{i-1}}{2h}\,\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h} - q_i y_i = -f_i, \tag{36}$$
$$i = 1, 2, \ldots, N-1.$$

Escribámoslo en la forma

$$\frac{1}{h}\left[b_i\frac{y_{i+1}-y_i}{h} - a_i\frac{y_i-y_{i-1}}{h}\right] - d_i y_i = -\varphi_i,$$

donde

$$d_i = q(x_i), \quad \varphi_i = f(x),$$
$$a_i = k_i - \frac{1}{4}(k_{i+1}-k_{i-1}), \quad b_i = k_i + \frac{1}{4}(k_{i+1}-k_{i-1}).$$

Aquí se ve que $b_i \neq a_{i+1}$, es decir, el esquema (36) no es conservador. Comparándolo con el (28), vemos que (36) corresponde a los valores

$$\alpha_{-1}=\frac{1}{4},\ \alpha_0=1,\ \alpha_1=-\frac{1}{4},\ \beta_{-1}=-\frac{1}{4},\ \beta_0=1,\ \beta_1=\frac{1}{4}.$$

Este esquema, hablando en general, no es resoluble. Si se requiere que se cumpla la condición

$$k_i>\frac{1}{4}|k_{i+1}-k_{i-1}|,$$

entonces dicho esquema será resoluble. En particular, para el problema (36) tenemos

$$a_n>0,\ b_n>0,\ a_{n+1}>0,\ b_{n+1}>0,\ \text{siendo}\ \frac{1}{5}<\frac{k_1}{k_2}<5.$$

Sustituyendo en la correlación

$$R_n=\frac{b_n b_{n+1}}{k_2}-\frac{a_n a_{n+1}}{k_1}=0$$

las expresiones

$$a_n=\frac{5k_1-k_2}{4},\quad b_n=\frac{3k_1+k_2}{4},\quad a_{n+1}=\frac{3k_2+k_1}{4},\quad b_{n+1}=\frac{5k_2-k_1}{4},$$

obtenemos la igualdad $(k_2-k_1)^3=0$, la cual se verifica sólo cuando $k_1=k_2$. Pues bien, el esquema (36) diverge en la clase de coeficientes continuos a trozos.

§ 3. Métodos de construcción de los esquemas en diferencias

1. Método de interpolación integral (método de equilibrio). Analicemos un ejemplo de construcción del esquema en diferencias para la ecuación diferencial con coeficientes variables:

$$Lu\equiv(k(x)\,u')'-q(x)\,u(x)=-f(x). \tag{1}$$

Consideraremos la ecuación (1) como ecuación de la distribución estacionaria del calor en un vástago. Esta ecuación se rige por la ley de conservación del calor (*ecuación de equilibrio*), la cual en el segmento $[x^{(1)}, x^{(2)}]$ tiene la forma

$$W(x^{(1)})-W(x^{(2)})-\int_{x^{(1)}}^{x^{(2)}} q(x)\,u(x)\,dx+\int_{x^{(1)}}^{x^{(2)}} f(x)\,dx=0 \tag{2}$$

y se puede obtener integrando la ecuación (1) respecto al segmento $[x^{(1)}, x^{(2)}]$. Aquí $W(x)=-k(x)\frac{du}{dx}$ es el flujo calorífico; $k(x)>0$, el coeficiente de conductibilidad térmica y $u(x)$, la temperatura.

Hagamos uso de la ecuación de equilibrio (2) para escribir el esquema en diferencias para la ecuación (1). Sea ω una red uniforme con el paso h y $x_{i-1/2} = x_i - 0{,}5h$, $x_{i+1/2} = x_i + 0{,}5h$.

Escribamos la ecuación de equilibrio (2) para el segmento $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$:

$$W_{i-1/2} - W_{i+1/2} - \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x)\, u(x)\, dx + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x)\, dx = 0. \qquad (3)$$

Para construir el esquema en diferencias aproximamos W y la primera integral de la (3). Supongamos que $u = \text{const} = u_i$, siendo $x_{i-1/2} \leqslant x \leqslant x_{i+1/2}$. Entonces

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x)\, u(x)\, dx \approx h d_i u_i, \quad d_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x)\, dx, \ (q(x) \geqslant 0). \qquad (4)$$

Integremos la igualdad $du/dx = -W/k$ respecto al segmento $[x_{i-1}, x_i]$:

$$u_{i-1} - u_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{W(x)}{k(x)}\, dx.$$

Ya que W está incluido en la (3) como puntos semienteros $x_{i+1/2}$, entonces, suponiendo $W = \text{const} = W_{i-1/2}$ para $x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i$, tendremos

$$u_{i-1} - u_i \approx W_{i-1/2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)},$$

ó

$$W_{i-1/2} \approx -a_i \frac{u_i - u_{i-1}}{h} = -a_i u_{\bar{x}, i}, \qquad (5)$$

$$a_i = \left[\frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \right]^{-1}. \qquad (6)$$

Sustituyendo en la (3) las expresiones (4) y (5) y denotando la función incógnita por y_i, obtendremos el esquema en diferencias, el cual representa en la red la ley de conservación del calor

$$\frac{1}{h}\left[a_{i+1} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - a_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \right] - d_i y_i = -\varphi_i,$$

lo que se escribe más brevemente empleando las designaciones sin índices

$$(a y_{\bar{x}})_x - dy = -\varphi, \qquad (7)$$

donde

$$\varphi=\varphi_i=\frac{1}{h}\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x)\,dx. \tag{8}$$

Los coeficientes del esquema en diferencias (7) se calculan con auxilio de las integrales mediante las fórmulas (4), (6) y (8). Si los coeficientes de la ecuación son funciones lisas, entonces a, d y φ se pueden sustituir salvo $O(h^2)$ por las expresiones

$$a_i=k(x_{i-1/2}),\quad d_i=q(x_i),\quad \varphi_i=f(x_i). \tag{9}$$

La ecuación de balance (2) se puede utilizar también para la construcción de los esquemas en diferencias en una red no uniforme. Sea ω una red no uniforme y $h_i=x_i-x_{i-1}$, $i=1, 2, \ldots, N$. Suponiendo que

$$x_{i-1/2}=x_i-0{,}5h_i,\qquad x_{i+1/2}=x_i+0{,}5h_{i+1}$$

y escribiendo la ecuación de balance (2) para el segmento $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$, obtendremos la correlación (3). En vez de la (4) en la red no uniforme tendremos

$$\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x)\,u(x)\,dx\approx \hbar_i d_i u_i,\qquad d_i=\frac{1}{\hbar_i}\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x)\,dx, \tag{4'}$$

donde $\hbar_i=\frac{1}{2}(h_i+h_{i+1})$.

Correcciones similares se deben efectuar también en las (6) y (8):

$$a_i=\left[\frac{1}{h_i}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{dx}{k(x_i)}\right]^{-1}, \tag{6'}$$

$$\varphi_i=\frac{1}{\hbar_i}\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x)\,dx. \tag{8'}$$

En tal caso el esquema en diferencias en una red no uniforme tendrá la forma

$$\frac{1}{\hbar_i}\left[\frac{a_{i+1}(y_{i+1}-y_i)}{h_{i+1}}-\frac{a_i(y_i-y_{i-1})}{h_i}\right]-d_iy_i=-\varphi_i,$$
$$i=1, 2, \ldots, N-1.$$

Si las funciones $k(x)$, $q(x)$ y $f(x)$ son suficientemente lisas los coeficientes a, d y φ se pueden calcular, como antes, empleando las fórmulas (9).

Examinemos un ejemplo más. Construyamos la aproximación en diferencias de la condición de frontera del tercer género para la

ecuación (1). Sea que esta condición está indicada en el punto $x = 0$ y tiene la forma

$$u'(0) = \tilde{\varkappa} u(0) - \tilde{g}. \qquad (10)$$

De acuerdo con la suposición el coeficiente $k(x)$ de la ecuación (1) es mayor que cero. Por esta razón, volvamos a escribir la condición (10) en una forma algo más cómoda

$$k(0)\, u'(0) = \varkappa u(0) - g, \qquad (11)$$

donde $\varkappa = \tilde{\varkappa}\, k(0)$ y $g = \tilde{g} k(0)$. La anotación de la condición de frontera en la forma (11) es más natural, puesto que el primer miembro de ésta contiene el flujo calorífico salvo el signo. Escribamos la ecuación de equilibrio (2) para el segmento $[0, h/2]$:

$$W_0 - W_{1/2} - \int_0^{h/2} q(x)\, u(x)\, dx + \int_0^{h/2} f(x)\, dx = 0. \qquad (12)$$

A base de la (11) tenemos

$$W_0 \equiv -k(0)\, u'(0) = -\varkappa u(0) + g.$$

Poniendo esta expresión en la (12), se nos obtendrá

$$-W_{1/2} = -\varkappa u_0 + g + \int_0^{h/2} q(x)\, u(x)\, dx + \int_0^{h/2} f(x)\, dx. \qquad (13)$$

Para aproximar $W_{1/2}$ y $\int_0^{h/2} q(x)\, u(x)\, dx$ en la (13) empleemos los mismos razonamientos que en la deducción de las correlaciones (4) y (5). Nos resultará

$$a_1 y_{\bar{x},0} = \left(\varkappa + \frac{h}{2} d_0\right) y_0 - \left(g + \frac{h}{2}\varphi_0\right) = \bar{\varkappa} y_0 - \bar{g}, \qquad (14)$$

donde

$$a_1 = \left[\frac{1}{h}\int_0^h \frac{dx}{k(x)}\right]^{-1}, \quad d_0 = \frac{2}{h}\int_0^{h/2} q(x)\, dx, \quad \varphi_0 = \frac{2}{h}\int_0^{h/2} f(x)\, dx.$$

Estas integrales también se pueden sustituir por unas u otras fórmulas de cuadratura, por ejemplo: $a_1 = k(x_{1/2}) = k_{1/2}$, $d_0 = q_0$, $\varphi_0 = f_0$.

Es fácil de comprobar que las ecuaciones de red (7) con los coeficientes preestablecidos por las fórmulas (4), (6), (8) ó (9) aproximan la ecuación (1) con el error de $O(h^2)$, siendo suficientemente lisa su solución $u = u(x)$. La condición de red de frontera (14) también aproxima la condición (11) con el error de $O(h^2)$. Es evidente que,

cuando $k(x) \equiv 1$ y $q(x) \equiv 0$, la condición de frontera de (14) coincide con la condición de frontera del problema (10) del § 1.

2. Método de Ritz. Como ya se ha señalado, al construir los métodos numéricos de resolución de los problemas de contorno con el operador autoconjugado, es deseable conservar la propiedad de autoconjugación también para el problema de red. No obstante, si la ecuación tiene una apariencia muy complicada y las condiciones de frontera tienen derivadas, en tal caso la escritura de un esquema autoconjugado satisfactorio puede provocar dificultades considerables. En este punto se expondrá el método de Ritz, el cual siempre lleva a los esquemas autoconjugados.

Recordemos la esencia del método de Ritz. Como se sabe, cualquier problema autoconjugado para una ecuación diferencial se puede reducir al problema equivalente de hallar la función la cual aporta el mínimo a cierta funcional. Así, por ejemplo, la búsqueda de la solución del problema de contorno

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) - q(x)u = -f(x), \quad 0 < x < 1, \tag{15}$$

$$k(0)u'(0) = \varkappa_0 u(0) - g_0, \quad -k(1)u'(1) = \varkappa_1 u(1) - g_1 \tag{16}$$

equivale al problema de hallar la función $u(x)$ la cual aporta el mínimo a la funcional

$$I(u) \equiv \frac{1}{2}[u, u] - \int_0^1 f(x)u(x)\,dx - g_0 u(0) - g_1 u(1), \tag{17}$$

donde

$$[u, v] = \int_0^1 [k(x)u'(x)v'(x) + q(x)u(x)v(x)]\,dx + \\ + \varkappa_0 u(0)v(0) + \varkappa_1 u(1)v(1) \tag{18}$$

para la cual la correlación (15) es la *ecuación de Euler*. Se conoce que si la función $q(x)$ y las constantes $\varkappa_0$ y $\varkappa_1$ no son negativas y la $q(x)$ no se reduce idénticamente a cero, entonces existe el mínimo de la funcional (17), además el elemento minimizante $u(x)$ pertenece al espacio $W_2^1[0, 1]$, el cual consta de las funciones de espacio $L_2[0, 1]$, las cuales tienen en el $[0, 1]$ derivadas generalizadas integrables con el cuadrado.

Así pues, si hay un problema variacional equivalente y existe el mínimo de su funcional, entonces, en vez de construir el método numérico de solución aproximada del propio problema de contorno, se puede hacer uso del método de Ritz para hallar aproximadamente el elemento u que minimiza la funcional $I(u)$. Recordemos el contenido de este método. Sea W el espacio en el que se busca el mínimo de la funcional $I(u)$, es decir, sea que la funcional $I(u)$ está definida

en los elementos $u \in W$ y el elemento $\overset{\circ}{u}$ en el cual se consigue el mínimo de $I(u)$ pertenece a W. Construyamos una sucesión de los subespacios de dimensión finita $V_n \in W$ y, en vez de buscar el mínimo en W, lo buscaremos en V_n. Sea n la dimensión del subespacio V_n y $\eta_i^{(n)}$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$ es la *base* de este subespacio, es decir, representemos todo elemento $u_n \in V_n$ en la forma

$$u_n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \eta_i^{(n)}. \qquad (19)$$

Poniendo esta representación de u_n, en vez de u, en la funcional $I(u)$, obtendremos una función de n variables $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$. Dado que deseamos obtener el mínimo de esta función, los números a_i deben satisfacer el sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial I}{\partial a_i} = 0, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \qquad (20)$$

Al resolver este sistema, los parámetros $\bar{a}_0, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_{n-1}$ adquirirán unos valores determinados que aportan el mínimo absoluto para la función $I(u_n)$. Sustituyendo estos valores de a_i en la (19), obtendremos la solución aproximada pedida

$$u_n = \sum_{i=0}^{n-1} \bar{a}_i \eta_i^{(n)}.$$

Para que la solución aproximada u_n converja a la resolución exacta u cuando $n \to \infty$, es necesario suponer que los subespacios de dimensión finita V_n aproximan, desde cierto punto de vista, al espacio W.

Hallemos la apariencia del sistema (20), partiendo de una funcional concreta (17). Sustituyendo la (19) en la (17), obtenemos

$$I(u_n) = \frac{1}{2}\left[\sum_{i=0}^{n-1} a_i\eta_i^{(n)}, \sum_{i=0}^{n-1} a_i\eta_i^{(n)}\right] - \int_0^1 f \sum_{i=0}^{n-1} a_i\eta_i^{(n)}dx - g_0 \sum_{i=0}^{n-1} a_i\eta_i^{(n)}(0) - g_1 \sum_{i=0}^{n-1} a_i\eta_i^{(n)}(1) = \frac{1}{2}\sum_{i,\,j=0}^{n-1} \alpha_{ij}a_ia_j - \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i a_i, \qquad (21)$$

donde

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} = [\eta_i^{(n)}, \eta_j^{(n)}], \qquad (22)$$

$$\beta_i = \int_0^1 f(x)\,\eta_i^{(n)}(x)\,dx + g_0\eta_i^{(n)}(0) + g_1\eta_i^{(n)}(1). \qquad (23)$$

Diferenciando la expresión (21) respecto a a_i e igualando las derivadas a cero, obtenemos el sistema de ecuaciones para determinar a_i:

$$\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{ij} a_j - \beta_i = 0, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \tag{24}$$

3. Construcción según el método de Ritz del esquema en diferencias para una ecuación de segundo orden. Lo expuesto anteriormente se refiere al método de Ritz en general. Pero nos proponemos el objetivo de construir con ayuda del método de Ritz el esquema en diferencias para los problemas (15) y (16). Se lo puede hacer a base de la especial elección de subespacios de dimensión finita V_n y funciones de coordenadas en estos subespacios. Introduzcamos en el segmento $[0, 1]$ una red uniforme $\bar{\omega}$ con el paso $h = 1/(n-1)$ y los nodos $x_1 = ih$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Designemos $n-1$ por N. El sistema (24) tendrá la forma de un esquema en diferencias de tres puntos, si la matriz de este sistema es de tres diagonales, es decir, si los coeficientes α_{ij} son iguales a cero cuando $|i-j| > 1$. Con estas condiciones el sistema (24) será un esquema en diferencias clásico, si en calidad de los parámetros del desarrollo de (19) se eligen los valores de la función en los nodos de la red $\bar{\omega}$. La matriz del sistema (24) será de tres diagonales, si las funciones de coordenadas del subespacio V_n, para $|i-j| \geqslant 2$, son ortogonales en el sentido de producto escalar (18). Si en calidad de las funciones de coordenadas $\eta_i^{(N)}(x)$ se toman las funciones diferentes a cero sólo cuando $|x - x_i| \leqslant h$, $x \in [0, 1]$, éstas serán ortogonales desde el punto de vista de (18) cuando $|i-j| \geqslant 2$.

Las funciones elementales de tipo indicado pertenecientes a W_2^1 son las funciones

$$\eta_i^{(N+1)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{cuando} \quad 0 \leqslant x \leqslant x_{i-1},\ x_{i+1} \leqslant x < 1, \\ (x - x_{i-1})/h & \text{cuando} \quad x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i, \\ (x_{i+1} - x)/h & \text{cuando} \quad x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}, \end{cases} \tag{25}$$

para $i = 1, 2, \ldots, N-1$,

$$\begin{gathered} \eta_0^{(N+1)}(x) = \begin{cases} (h-x)/h, & 0 \leqslant x \leqslant h, \\ 0, & h \leqslant x \leqslant 1, \end{cases} \\ \eta_N^{(N+1)}(x) = \begin{cases} (x-1+h)/h, & 1-h \leqslant x \leqslant 1, \\ 0, & 0 \leqslant x \leqslant 1-h. \end{cases} \end{gathered} \tag{26}$$

Las funciones $\eta_i(x)$ en los trozos donde son diferentes de cero, están representadas en la fig. 4.

Si en calidad de las funciones de coordenadas se toman las funciones (25) y (26) y en calidad de los parámetros del desarrollo de (19),

los valores de la función en los nodos de la red, entonces, los subespacios V_{N+1} constarán de las funciones continuas lineales a trozos. Dichos subespacios aproximan a W_2^1 cuando $N = 1, 2, \ldots$ Por lo tanto el sistema (24) toma la forma

$$\begin{gathered}\alpha_{i,\,i-1}y_{i-1}+\alpha_{i,\,i}y_i+\alpha_{i,\,i+1}y_{i+1}-\beta_i=0,\quad i=1,\,2,\ldots,\,N-1,\\ \alpha_{0,\,0}y_0+\alpha_{0,\,1}y_1-\beta_0=0,\\ \alpha_{N,\,N-1}y_{N-1}+\alpha_{N,\,N}y_N-\beta_N=0.\end{gathered}\tag{27}$$

Calculemos los coeficientes α_{ij} y β_i. Valiéndonos de la forma de las

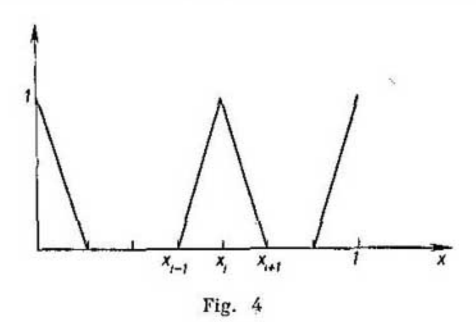


Fig. 4

funciones $\eta_i^{N+1}(x)$ y de las fórmulas (18) y (22), hallamos

$$\alpha_{i,\,i}=h^{-2}\Big[\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}k(x)\,dx+\int_{x_{i-1}}^{x_i}q(x)(x-x_{i-1})^2\,dx+\int_{x_i}^{x_{i+1}}q(x)(x-x_{i+1})^2\,dx\Big],$$

$$\alpha_{0,\,0}=h^{-2}\Big[\int_0^h k(x)\,dx+\int_0^h q(x)(x-h)^2\,dx\Big]+\varkappa_0,$$

$$\alpha_{N,\,N}=h^{-2}\Big[\int_{1-h}^1 k(x)\,dx+\int_{1-h}^1 q(x)(x-1+h)^2\,dx\Big]+\varkappa_1,\tag{28}$$

$$\alpha_{i,\,i+1}=\alpha_{i+1,\,i}=h^{-2}\Big[-\int_{x_i}^{x_{i+1}}k(x)\,dx+\int_{x_i}^{x_{i+1}}q(x)(x_{i+1}-x)(x-x_i)\,dx\Big],$$

$$\beta_i = h^{-1}\left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)(x-x_{i-1})\,dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)(x_{i+1}-x)\,dx\right],$$

$$\beta_0 = h^{-1}\int_0^h f(x)(h-x)\,dx + g_0,$$

$$\beta_N = h^{-1}\int_{1-h}^1 f(x)(x-1+h)\,dx + g_1.$$

Intoduzcamos las designaciones:

$$a_i = h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i} k(x)\,dx - h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i} q(x)(x_i-x)(x-x_{i-1})\,dx,$$

$$i=1,\ 2,\ \ldots,\ N.$$

$$d_i = h^{-2}\left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} q(x)(x-x_{i-1})\,dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} q(x)(x_{i+1}-x)\,dx\right],$$

$$i=1,\ 2,\ \ldots,\ N-1.$$

$$d_0 = 2h^{-2}\int_0^h q(x)(h-x)\,dx,$$

$$d_N = 2h^{-2}\int_{1-h}^1 q(x)(x-1+h)\,dx, \tag{29}$$

$$\varphi_i = h^{-1}\beta_i = h^{-2}\left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)(x-x_{i-1})\,dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)(x_{i+1}-x)\,dx\right],$$

$$i=1,\ 2,\ \ldots,\ N-1,$$

$$\varphi_0 = 2h^{-2}\int_0^h f(x)(h-x)\,dx,$$

$$\varphi_N = 2h^{-2}\int_{1-h}^1 f(x)(x-1+h)\,dx.$$

Empleando las designaciones de (29) y la forma de los coeficientes α_{ij} y β_j de acuerdo con (28), el sistema (27) se puede escribir en la

forma

$$
\begin{gathered}
(ay_{\bar{x}})_x - dy = -\varphi(x), \quad x = h,\ 2h,\ \ldots,\ 1-h, \\
a_1 y_{x,0} = (\varkappa_0 + 0{,}5hd_0)y_0 - (g_0 + 0{,}5\,h\,\varphi_0), \quad x = 0, \qquad (30) \\
-a_N y_{\bar{x},N} = (\varkappa_1 + 0{,}5hd_N)y_N - (g_1 + 0{,}5\,h\varphi_N), \quad x = 1.
\end{gathered}
$$

Es fácil de verificar que, si los coeficientes $k(x)$, $q(x)$ y $f(x)$ son suficientemente lisos, a_i, d_i y φ_i difieren de $k(x_i - 0{,}5h)$, $q(x_i)$ y $f(x_i)$, respectivamente, en la magnitud $O(h^2)$. Hacen una excepción d_0, d_N, φ_0, y φ_N, los cuales difieren de los correspondientes valores de los coeficientes $q(x)$ y $f(x)$ en la magnitud $O(h)$. Con esta elección de los coeficientes las aproximaciones de la ecuación y de la condición izquierda de frontera (30) coinciden con las aproximaciones (7) y (14) construidas anteriormente según el método de equilibrio. Por lo tanto el problema de diferencias (30) aproxima el problema (15), (16) con el error de $O(h^2)$, siendo suficientemente lisos los coeficientes.

Si los coeficientes $k(x)$ y $q(x)$ son constantes, a_i y d_i se pueden hallar en la forma explícita

$$a_i = a = k - \frac{h^2}{6}q, \quad d_i = d = q.$$

4. Construcción, según el método de Ritz, de los esquemas en diferencias para una ecuación de cuarto orden.

Estudiemos un ejemplo más de construcción del esquema en diferencias empleando el método de Ritz para resolver un problema de variación. Construyamos el esquema en diferencias que aproxima el problema de contorno para la ecuación diferencial corriente elemental de cuarto orden con las llamadas condiciones principales de frontera.

Se analiza el problema:

$$u^{\mathrm{IV}}(x) = f(x), \qquad 0 < x < 1, \tag{31}$$

$$u(0) = u'(0) = u(1) = u'(1) = 0. \tag{32}$$

Hallar la solución del problema (31)—(32) equivale a la búsqueda de tal función $u(x)$ que satisface las condiciones (32) y aporta el mínimo a la funcional

$$I(u) \equiv \int_0^1 (u'')^2\,dx - 2\int_0^1 f(x)\,u(x)\,dx. \tag{33}$$

Como se sabe, en las condiciones de (32) el mínimo de la funcional (33) existe y el elemento minimizante pertenece al espacio $\overset{\circ}{W}{}_2^2[0,\ 1]$, el cual consta de las funciones de espacio $L_2[0,\ 1]$, que satisfacen las condiciones (32) y tienen en el $[0,\ 1]$ derivadas generalizadas de primero y segundo órdenes integrables con el cuadrado. Por esta

razón, al emplear el método de Ritz para la solución aproximada del problema (33), conviene tomar en calidad de V_n los subespacios de dimensión finita $\mathring{W}_2^2$. Si, como antes, $\eta_i^{(n)}(x)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, son las funciones de coordenadas en V_n y a_i son los coeficientes del desarrollo de (19), para hallar a_i de nuevo obtendremos el sistema (24), pero esta vez

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} = \int_0^1 \frac{d^2\eta_i^{(n)}}{dx^2} \cdot \frac{d^2\eta_j^{(n)}}{dx^2}\, dx, \qquad \beta_i = \int_0^1 f(x)\, \eta_i^{(n)}(x)\, dx.$$

De nuevo introduzcamos en el $[0, 1]$ una red en diferencias uniforme. Nos se requiere hallar la solución aproximada del problema (31)—(32) sólo en los nodos interiores de la red $\bar{\omega}$, es decir, en $\omega = \{x_i = ih \mid i = 1, 2, 3, \ldots, N-1\}$.

Para obtener el esquema en diferencias a base del sistema (24), es menester que una parte, por lo menos, de los coeficientes a_i de (19) sean los valores de la función de red en los nodos ω. Con esto las funciones de coordenadas no pueden ser diferentes de cero más que en un nodo de la red, puesto que en el caso contrario los valores de las funciones en los nodos de la red no podrán ser parámetros. Más aún, no se logra limitarse a los parámetros que son valores de la función en los nodos de la red, puesto que los subespacios V_n en tal caso no aproximarán a $\mathring{W}_2^2$. A saber, con auxilio de estas familias no se consigue aproximar uniformemente las derivadas, lo que hace falta para la aproximación de $\mathring{W}_2^2$.

Por consiguiente, es necesario aumentar el número de los parámetros (y, por lo tanto, de las funciones de coordenadas). Se pueden tomar como parámetros complementarios los valores de las derivadas de la función incógnita en los nodos de la red. Entonces, el sistema (24) contendrá en calidad de incógnitas no sólo los valores de la solución buscada en los nodos de la red, sino también los valores de las primeras derivadas en los mismos nodos. En relación con esto el (24) ya no será un esquema en diferencias según la concepción clásica, el cual sin embargo se puede obtener de aquí eliminando las incógnitas complementarias.

Pues, supongamos que $n = 2(N-1)$, como parámetros de a_i tomemos las magnitudes: $y_1, y_2, \ldots, y_{N-1}$ y $v_1, v_2, \ldots, v_{N-1}$. Sea que el primer grupo de los parámetros son los valores de la solución buscada en los nodos de la red ω, mientras que el segundo grupo son los valores de la primera derivada en los mismos nodos. En el ejemplo anterior en calidad de subespacio V_n tomamos el espacio de las funciones continuas lineales a trozos (lineales en cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$). Esta vez no podemos tomar este subespacio, puesto que estas funciones ni siquiera pertenecen a $W_2^2[0, 1]$ debido a las discontinuidades de las primeras derivadas en los nodos de la

red ω. Se puede tomar en calidad de V_n el espacio de las funciones continuas polinomiales (las potencias son mayores que la unidad) a trozos y que tienen las primeras derivadas continuas. Recordemos que la dimensión del espacio V_n ya hemos fijado igual a $2(N-1) = n$. Si tentamos tomar en calidad de V_n el espacio de las funciones cuadráticas a trozos (son cuadráticas en cada uno de los intervalos $[x_{i-1}, x_i]$), las cuales poseen una lisura requirida, no podremos hacerlo en vista de que este espacio tendrá la dimensión $N-2$ (N parábolas de segundo orden tienen $3N$ ocoeficientes. Para satisfacer a las ondiciones de frontera (32) y garantizar la continuidad de las funciones y de sus primeras derivadas en los nodos de la red ω se requieren $2(N+1)$ condiciones). No obstante, en calidad de V_n e puede tomar un espacio de las funciones cuadráticas a trozos de $\overset{\circ}{W}{}_2^2$, las cuales en cada uno de los intervalos $[x_{i-1}, x_i]$ se representa por dos parábolas. La dimensión de este espacio ya será $2(N-1)$. También se puede tomar en calidad de V_n el espacio de las funciones cúbicas a trozos de $\overset{\circ}{W}{}_2^2$ (son cúbicas en cada uno de los intervalos $[x_{i-1}, x_i]$).

El significado de los coeficientes de a_i del desarrollo de (19) ya hemos definido y, por consiguiente, la base de V_n se determina unívocamente. Esta consta de funciones de dos tipos, las cuales designaremos a través de $\eta_i(x)$ y $\zeta_i(x)$. Sea que de coeficientes de las funciones $\eta_i(x)$ en el desarrollo de (19) sirven los parámetros y_i y de las $\zeta_i(x)$, los parámetros v_i. En tal caso las funciones $\eta_i(x)$ se deben reducir a cero en todos los nodos de la red ω, excepto el nodo x_i, donde la función $\eta_i(x)$ debe tomar el valor igual a la unidad. Las primeras derivadas de las funciones $\eta_i(x)$ deben ser iguales a cero en todos los nodos de la red ω. Las funciones de coordenadas $\zeta_i(x)$ se deben reducir a cero en todos los nodos de la red y tener la derivada igual a 1 en el nodo x_i. En los demás nodos de ω las primeras derivadas de la $\zeta_i(x)$ se deben reducir a cero. Es fácil de verificar que en el espacio mencionado de funciones cúbicas a trozos la base se preestablece por las funciones

$$\eta_i(x)=\begin{cases} 0, \quad 0\leqslant x\leqslant x_{i-1}, & x_{i+1}\leqslant x\leqslant 1, \\ -2\left(\frac{x-x_{i-1}}{h}\right)^3+3\left(\frac{x-x_{i-1}}{h}\right)^2, & x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i, \\ 2\left(\frac{x-x_{i+1}}{h}\right)^3+3\left(\frac{x-x_{i+1}}{h}\right)^2, & x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}, \end{cases} \tag{34}$$

$$\zeta_i(x)=\begin{cases} 0, \quad 0\leqslant x\leqslant x_{i-1}, & x_{i+1}\leqslant x\leqslant 1, \\ h\left(\frac{x-x_{i-1}}{h}\right)^3-h\left(\frac{x-x_{i-1}}{h}\right)^2, & x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i, \\ h\left(\frac{x-x_{i+1}}{h}\right)^3+h\left(\frac{x-x_{i+1}}{h}\right)^2, & x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}. \end{cases} \tag{35}$$

La base del espacio, indicado más arriba, de las funciones cuadráticas a trozos es

$$\bar{\eta}_i(x)=\begin{cases} 0, & 0\leqslant x\leqslant x_{i-1}, \quad x_{i+1}\leqslant x\leqslant 1,\\ 2\left(\frac{x-x_{i-1}}{h}\right)^2, & x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i-0{,}5h,\\ -2\left(\frac{x-x_i}{h}\right)^2+1, & x_i-0{,}5h\leqslant x\leqslant x_i+0{,}5h,\\ 2\left(\frac{x-x_{i+1}}{h}\right)^2, & x_i+0{,}5h\leqslant x\leqslant x_{i+1},\end{cases} \tag{36}$$

$$\bar{\zeta}_i(x)=\begin{cases} 0, \quad 0\leqslant x\leqslant x_{i-1}, & x_{i+1}\leqslant x\leqslant 1,\\ -\frac{1}{2h}(x-x_{i-1})^2, & x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i-0{,}5h,\\ x-x_i+\frac{3}{2h}(x-x_i)^2, & x_i-0{,}5h\leqslant x\leqslant x_i,\\ x-x_i-\frac{3}{2h}(x-x_i)^2, & x_i\leqslant x\leqslant x_i+0{,}5h,\\ \frac{1}{2h}(x-x_{i+1})^2, & x_i+0{,}5h\leqslant x\leqslant x_{i+1}.\end{cases} \tag{37}$$

Las funciones (34)—(37) están representadas en las figs. 5 *a* y *b*.

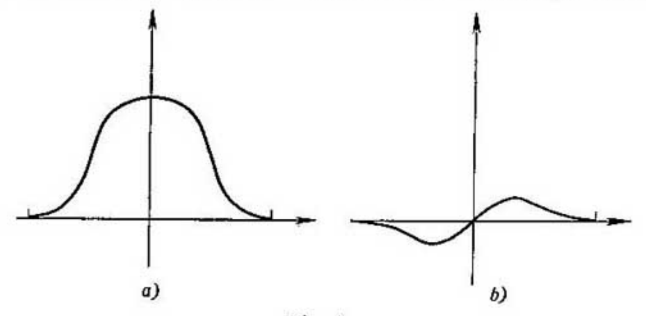


Fig. 5

De suerte que la solución aproximada del problema (33) la buscaremos de la forma

$$u_N(x)=\sum_{i=1}^{N-1}(y_i\eta_i(x)+x_i\zeta_i(x)). \tag{38}$$

Sustituyendo (38) en la (33), obtendremos

$$I(u_N)=\int_0^1\Big[\sum_{i=1}^{N-1}(y_i\eta_i''(x)+v_i\zeta_i''(x))\Big]^2dx-$$

$$-2\int_0^1 f(x)\sum_{i=1}^{N-1}(y_i\eta_i(x)+v_i\zeta_i(x))\,dx=$$

$$=\int_0^1\sum_{i,\,j=1}^{N-1}(y_iy_j\eta_i''\eta_j''+2y_iv_j\eta_i''\zeta_j''+v_iv_j\zeta_i''\zeta_j'')\,dx-$$

$$-2\int_0^1 f(x)\sum_{i=1}^{N-1}(y_i\eta_i+v_i\zeta_i)\,dx=$$

$$=\sum_{i,\,j=1}^{N-1}(\alpha_{ij}y_iy_j+2\overline{\alpha}_{ij}y_iv_j+\overline{\overline{\alpha}}_{ij}v_iv_j)-2\sum_{i=1}^{N-1}(\beta_iy_i+\overline{\beta}_iv_i), \qquad (39)$$

donde

$$_{ij}=\alpha_{ji}=\int_0^1\eta_i''\eta_j''\,dx,\quad \overline{\overline{\alpha}}_{ij}=\overline{\overline{\alpha}}_{ji}=\int_0^1\zeta_i''\zeta_j''\,dx,$$

$$\overline{\alpha}_{ij}=\int_0^1\eta_i''\zeta_j''\,dx,\qquad \beta_i=\int_0^1 f(x)\,\eta_i(x)\,dx, \qquad (40)$$

$$\overline{\beta}_i=\int_0^1 f(x)\,\zeta_i(x)\,dx,\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ N-1.$$

Diferenciando la (39) respecto a y_i y v_i, $i = 1, 2, \ldots, N-1$, e igualando a cero las derivadas obtenidas, tendremos el sistema para determinar y_i y v_i

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{N-1}(\alpha_{ij}y_j+\overline{\alpha}_{ij}v_j)-\beta_i=0,\\&\sum_{j=1}^{N-1}\overline{\alpha}_{ji}y_j+\overline{\overline{\alpha}}_{ij}v_j)-\beta_i=0,\qquad i=1,\ 2,\ \ldots,N-1.\end{aligned} \qquad (41)$$

Volvamos a escribir este sistema en la forma

$$AU=F,$$

donde $U=\binom{y}{v}$ es el vector incógnito, $F=\binom{\beta}{\overline{\beta}}$ es el vector dado, $A=\begin{pmatrix}\alpha & \overline{\alpha}\\ \overline{\alpha}' & \overline{\overline{\alpha}}\end{pmatrix}$ es la matriz celular, cuyos elementos son las matrices

$$\alpha=(\alpha_{ij}),\quad \overline{\alpha}=(\overline{\alpha}_{ij}),\quad \overline{\alpha}'=(\overline{\alpha}_{ji}),\quad \overline{\overline{\alpha}}=(\overline{\overline{\alpha}}_{ij}).$$

La matriz transpuesta tiene la forma

$$A' = \begin{pmatrix} \alpha & \bar{\alpha} \\ \bar{\alpha}' & \bar{\bar{\alpha}} \end{pmatrix},$$

es decir, la matriz A es simétrica.

Calculemos los valores de los coeficientes α_{ij}, $\bar{\alpha}_{ij}$, $\bar{\bar{\alpha}}_{ij}$. A base de (40), empleando la forma de las funciones $\eta_i(x)$ y $\zeta_i(x)$, de acuerdo con (34) y (35), hallamos:

$$\alpha_{i,\,i} = 24/h^2, \quad \bar{\alpha}_{ii} = 0, \quad \bar{\bar{\alpha}}_{ii} = 8/h, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1,$$
$$\alpha_{i,\,i+1} = \alpha_{i+1,\,i} = -12/h^3, \quad \bar{\alpha}_{i,\,i+1} = 6/h^2,$$
$$\bar{\alpha}_{i+1,\,i} = -6/h^2,$$
$$\bar{\bar{\alpha}}_{i,\,i+1} = \bar{\bar{\alpha}}_{i+1,\,i} = 2/h, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N-2,$$
$$\alpha_{ij} = \bar{\alpha}_{ij} = \bar{\bar{\alpha}}_{ij} = 0, \quad |i-j| \geqslant 2.$$

Ahora el sistema (41) se puede escribir del modo siguiente:

$$l_i(y,\ v) \equiv 2y_{i-1} - 4y_i + 2y_{i+1} + hv_{i-1} - hv_{i+1} = -\frac{h^3}{6}\beta_i,$$
$$m_i(y,\ v) \equiv 3y_{i-1} - 3y_{i+1} + hv_{i-1} + 4hv_i + hv_{i+1} = \frac{h^2}{2}\bar{\beta}_i,$$
$$i = 2,\ 3,\ \ldots,\ N-2,$$
$$l_1(y,\ v) \equiv -4y_1 + 2y_2 - hv_2 = -\frac{h^3}{6}\beta_1, \qquad (42)$$
$$l_{N-1}(y,\ v) \equiv 2y_{N-2} - 4y_{N-1} + hv_{N-2} = -\frac{h^3}{6}\beta_{N-1},$$
$$m_1(y,\ v) \equiv -3y_2 + 4hv_1 + hv_2 = \frac{h^2}{2}\bar{\beta}_1,$$
$$m_{N-1}(y,\ v) \equiv 3y_{N-2} + hv_{N-2} + 4hv_{N-1} = \frac{h^2}{2}\bar{\beta}_{N-1}.$$

Para poder comparar el esquema obtenido con el esquema en diferencias corriente eliminamos de (42) la función v_i. Es fácil de comprobar que

$$l_{i-1} + 4l_i + l_{i+1} - m_{i-1} + m_{i+1} \equiv -y_{i-2} + 4y_{i+1} - 6y_i +$$
$$+ 4y_{i+1} - y_{i+2} = -\frac{h^3}{6}(\beta_{i-1} + 4\beta_i + \beta_{i+1}) - \frac{h^2}{2}(\bar{\beta}_{i-1} - \bar{\beta}_{i+1}),$$
$$i = 3,\ 4,\ \ldots,\ N-3,$$
$$l_1 + 4l_2 + l_3 - m_1 + m_3 \equiv 4y_1 - 6y_2 + 4y_3 - y_4 =$$
$$= -\frac{h^3}{6}(\beta_1 + 4\beta_2 + \beta_3) - \frac{h^2}{2}(\bar{\beta}_1 - \bar{\beta}_3),$$

$$7l_1+2l_2-m_1+2m_2\equiv -18y_1+9y_2-2y_3=$$
$$=-\frac{h^3}{6}(7\beta_1+2\beta_2)-\frac{h^2}{2}(\overline{\beta}_1-2\overline{\beta}_2), \quad (43)$$
$$l_{N-3}+4l_{N-2}+l_{N-1}-m_{N-3}+m_{N-1}\equiv -y_{N-4}+4y_{N-3}-6y_{N-2}+$$
$$+4y_{N-1}=-\frac{h^3}{6}(\beta_{N-3}+4\beta_{N-2}+\beta_{N-1})-\frac{h^2}{2}(\overline{\beta}_{N-3}-\overline{\beta}_{N-1}),$$
$$2l_{N-2}+7l_{N-1}-2m_{N-2}+m_{N-1}\equiv -2y_{N-3}+9y_{N-2}-18y_{N-1}=$$
$$=-\frac{h^3}{6}(2\beta_{N-2}+7\beta_{N-1})-\frac{1}{2}h^2(2\beta_{N-2}-\beta_{N-1}).$$

Recurriendo a las designaciones introducidas anteriormente para las correlaciones en diferencias, escribamos el sistema (43) en forma de exquema en diferencias

$$y_{\bar{x}x\bar{x}x}=\varphi(x), \quad x=2h,\ 3h,\ \ldots,\ 1-2h,$$
$$y(0)=0, \qquad y_{\bar{x}}-\frac{h}{2}y_{\bar{x}x}+\frac{h^2}{3}y_{\bar{x}xx}|_{x=h}=\frac{h^3}{4}\varphi(x_1), \quad (44)$$
$$y(1)=0, \qquad y_x+\frac{h}{2}y_{\bar{x}x}+\frac{h^2}{3}y_{\bar{x}x\bar{x}}|_{x=1-h}=-\frac{h^3}{4}\varphi(x_{N-1}),$$

donde

$$\varphi(x_i)=\frac{1}{6h}\left\{\int_{x_{i-2}}^{x_{i-1}} f(x)\left(\frac{x-x_{i-2}}{h}\right)^3dx+\right.$$
$$+\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\left[-3\left(\frac{x-x_i}{h}\right)^3-6\left(\frac{x-x_i}{h}\right)^2+4\right]dx+$$
$$+\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\left[3\left(\frac{x-x_i}{h}\right)^3-6\left(\frac{x-x_i}{h}\right)^2+4\right]dx+$$
$$\left.+\int_{x_{i+1}}^{x_{i+2}} f(x)\left(\frac{x_{i+2}-x}{h}\right)^3dx\right\}, \quad (45')$$

$i=2,\ 3,\ \ldots,\ N-2,$

$$\varphi(x_1)=\frac{1}{9h}\left\{\int_0^h f(x)\left[-11\left(\frac{x}{h}\right)^3+18\left(\frac{x}{h}\right)^2\right]dx+\right.$$
$$+\int_h^{2h} f(x)\left[17\left(\frac{x-2h}{h}\right)^3-10\left(\frac{x-h}{h}\right)^3+24\left(\frac{x-2h}{h}\right)^2+\right.$$
$$\left.+12\left(\frac{x-h}{h}\right)^2\right]dx-2\int_{2h}^{3h} f(x)\left(\frac{x-3h}{h}\right)^3dx,$$

$$\varphi(x_{N-1})=\frac{1}{9h}\left\{2\int_{1-3h}^{1-2h} f(x)\left(\frac{x-1+3h}{h}\right)^3 dx+\right. \tag{45''}$$

$$+\int_{1-2h}^{1-h} f(x)\left[10\left(\frac{x-1+h}{h}\right)^3-17\left(\frac{x-1+2h}{h}\right)^3+12\left(\frac{x-1+h}{h}\right)^2+\right.$$

$$\left.\left.+24\left(\frac{x-1+2h}{h}\right)^2\right]dx+\int_{1-h}^{1} f(x)\left[11\left(\frac{x-1}{h}\right)^3+18\left(\frac{x-1}{h}\right)^2\right]\right\}dx.$$

Si para el método de Ritz en calidad de funciones de coordenadas se toman las funciones (36) y (37), el esquema en diferencias tendrá la forma

$$\begin{gathered} y_{\bar{x}x\bar{x}x}=\bar{\bar{\varphi}}(x), \quad x=2h,\ 3h,\ \ldots,\ 1-2h, \\ y(0)=0, \quad y_{\bar{x}}-\frac{h}{2}y_{\bar{x}x}+\frac{5h^2}{16}\,y_{\bar{x}xx}\Big|_{x=h}=\frac{7h^3}{16}\,\bar{\varphi}(h), \\ y(1)=0, \quad y_x+\frac{h}{2}\,y_{\bar{x}x}+\frac{5h^2}{16}\,y_{\bar{x}x\bar{x}}\Big|_{x=1-h}=-\frac{7h^3}{16}\,\bar{\varphi}(1-h), \end{gathered} \tag{46}$$

donde $\bar{\varphi}(x)$ se determina según las fórmulas análogas a las (45). Se puede verificar que con una lisura suficiente de la solución del problema (31), (32) el esquema en diferencias (44) tiene el error de aproximación igual a $O(h^4)$. El esquema (46) tiene el error de $O(h^2)$

Advertamos que a diferencia del problema (41) los esquemas (44) y (46) no son autoconjugados. Este defecto del esquema se engendró como resultado de la eliminación de las incógnitas v_i del sistema (42).

5. **Métodos de aproximación de la funcional.** Al construir según el método de Ritz el esquema en diferencias para la ecuación de cuarto orden (el problema (31), (32)) tropezamos con la circunstancia de que el sistema obtenido contiene dos veces más ecuaciones (e incógnitas) que el número de los nodos de la red. En el ejemplo aducido estas incógnitas «sobrantes» se han conseguido eliminar, pero la matriz del sistema hallado ha resultado asimétrica. El método de aproximación de la funcional, expuesto a continuación, está exento de dichas incomodidades. Según este método también se obra partiendo de la funcional de variación, pero se aproxima no el espacio en el que se busca su mínimo, sino la propia funcional. Si la aproximación se elige acertadamente, entonces empleando este método se pueden construir buenos esquemas en diferencias.

Analicemos dos ejemplos de construcción de esquemas en diferencias con auxilio del método de aproximación de la funcional. Como primer ejemplo construyamos el esquema en diferencias para el problema (15), (16). Partiremos del problema equivalente de hallar el elemento minimizante de la funcional (17).

Para construir el método aproximado de minimización de la funcional (17) sustituyamos las integrales comprendidas en su expresión por las fórmulas de cuadratura y la derivada, por la razón de diferencias. Con más precisión, sea $\bar{\omega}$ una red uniforme en el segmento [0, 1] con el paso h. Sustituyamos la primera integral de la expresión (17) por la fórmula de cuadratura de los rectángulos centrales y las dos siguientes integrales, por las fórmulas de cuadratura de los trapecios. El valor de la derivada la cual se toma en los puntos $x_i - 0{,}5h$, donde x_i son los nodos de la red, cambiémoslo por la siguiente correlación en diferencias:

$$u'(x)\,|_{x=x_i-0,5h} \sim u_{\bar{x},\,i} = \frac{u_i - u_{i-1}}{h}.$$

Nos resulta

$$I_h(y) = \sum_{i=1}^{N} k(x_i - 0{,}5h)\left(\frac{y_i - y_{i-1}}{h}\right)^2 h + \frac{h}{2}\left(q(0)\,y_0^2 + q(1)\,y_N^2 - 2f(0)\,y_0 - 2f(1)\,y_N\right) + \sum_{i=1}^{N-1}\left[q(x_i)\,y_i^2 - 2f(x_i)\,y_i\right]h + \varkappa_0 y_0^2 + \varkappa_1 y_N^2 - 2g_0 y_0 - 2g_1 y_N. \quad (47)$$

$I_h(y)$ es la función de $(N+1)$ variables y_i; para hallar las ecuaciones que determinan el punto de su mínimo, hace falta igualar a cero las primeras derivadas de esta función respecto a y_i. Para $i = 1, 2, \ldots, N-1$ tenemos las siguientes ecuaciones:

$$-\frac{2}{h}k(x_i + 0{,}5h)(y_{i+1} - y_i) + \frac{2}{h}k\left(x_i - \frac{h}{2}\right)(y_i - y_{i-1}) + 2q(x_i)\,hy_i - 2hf(x_i) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1, \quad (48)$$

siendo $i = 0$ y $i = N$, obtendremos respectivamente

$$\left.\begin{aligned} -\frac{2}{h}k\left(\frac{h}{2}\right)(y_1 - y_0) + hq(0)\,y_0 - hf(0) + 2\varkappa_0 y_0 - 2g_0 = 0,\\ \frac{2}{h}k\left(1 - \frac{h}{2}\right)(y_N - y_{N-1}) + hq(1)\,y_N - hf(1) + 2\varkappa_1 y_N - 2g_1 = 0. \end{aligned}\right\} \quad (49)$$

Multiplicando las (48) por (-1) y dividiendo en $2h$, hallamos que

$$\frac{1}{h}\left[k\left(x_i + \frac{h}{2}\right)\frac{y_{i+1} - y_i}{h} - k\left(x_i - \frac{h}{2}\right)\frac{y_i - y_{i-1}}{h}\right] - q(x_i)\,y_i = -f(x_i) \quad i = 1, 2, \ldots, N-1. \quad (50)$$

Las correlaciones (49) dividámoslas en 2:

$$k\left(\frac{h}{2}\right)\frac{y_1-y_0}{h}=\left(\varkappa_0+\frac{h}{2}q(0)\right)y_0-\left(g_0+\frac{h}{2}f(0)\right),$$

$$-k\left(1-\frac{h}{2}\right)\frac{y_N-y_{N-1}}{h}=\left(\varkappa_1+\frac{h}{2}q(1)\right)y_N-\left(g_1+\frac{h}{2}f(1)\right). \qquad (51)$$

Es fácil comprobar que el esquema en diferencias (50) y èl esquema en diferencias (7), construido anteriormente según el método de equilibrio, coinciden, si los coeficientes del (7) se toman de acuerdo con las (9). Así mismo son iguales la primera condición de frontera de (51) y la condición de frontera de (14), construida antes según el método de equilibrio.

Examinemos un ejemplo más de la construcción del esquema en diferencias, pero ahora ya para la ecuación corriente elemental de cuarto orden con las llamadas *condiciones de frontera naturales*:

$$u^{\mathrm{IV}}+qu=f(x),\quad 0<x<1,\quad q=\text{const},$$
$$u''(0)=u'''(0)=u''(1)=u'''(1)=0. \qquad (52)$$

El problema (52) equivale al problema de hallar el elemento $u(x)$ que minimiza la funcional

$$I(u)=\int_0^1((u'')^2+qu^2)\,dx-2\int_0^1 u(x)f(x)\,dx. \qquad (53)$$

Esta vez aproximiremos todas las integrales a base de la fórmula de cuadratura de los trapecios, además al aproximar la integral de $(u''(x))^2$ hagamos uso de las condiciones de frontera (52), o sea, de las condiciones de que $u''(0)=u''(1)=0$.

Reemplazando ahora u'' por la segunda razón en diferencias $u_{\bar{x}x}$, hallaremos la siguiente aproximción de la funcional (53):

$$I_h(y)=\sum_{i=1}^{N-1}\left(\frac{y_{i-1}-2y_i+y_{i+1}}{h^2}\right)^2h+\sum_{i=1}^{N-1}(qy_i^2-2f(x_i)y_i)h+$$
$$+\frac{h}{2}[qy_0^2+qy_N^2-2f(0)y_0-2f(1)y_N].$$

Diferenciemos $I_h(y)$ respecto a y_i y obtendremos las ecuaciones en diferencias para hallar y_i:

$$\frac{2}{h^3}(y_{i-2}-2y_{i-1}+y_i)-\frac{4}{h^3}(y_{i-1}-2y_i+y_{i+1})+$$
$$+\frac{2}{h^3}(y_i-2y_{i+1}+y_{i+2})+2hqy_i-2hf(x_i)=0,$$
$$i=2,3,\ldots,N-2,$$

$$-\frac{4}{h^3}(y_0-2y_1+y_2)+\frac{2}{h^3}(y_1-2y_2+y_3)+2(qy_1-2f(h))=0,$$

$$\frac{2}{h^3}(y_0-2y_1+y_2)+hqy_0-hf(0)=0,$$

$$\frac{2}{h^3}(y_{N-3}-2y_{N-2}+y_{N-1})-\frac{4}{h^3}(y_{N-2}-2y_{N-1}+y_N)+$$
$$+2(qy_{N-1}-2hf(1-h))=0,$$

$$\frac{2}{h^3}(y_{N-2}-2y_{N-1}+y_N)+hqy_N-hf(1)=0.$$

Multiplicando las correlaciones obtenidas por las expresiones convenientes y empleando las denotaciones introducidas más arriba para las relaciones en diferencias, tendremos

$$\begin{aligned} & y_{xx}+\frac{h^2}{2}qy=\frac{h^2}{2}f, \qquad x=0, \\ & y_{xx\bar{x}}-\frac{1}{h}y_{\bar{x}x}+hqy=hf, \qquad x=h, \\ & y_{\bar{x}x\bar{x}x}+qy=f, \ x=2h,\ 3h,\ \ldots,\ 1-2h, \\ -& y_{\bar{x}\bar{x}x}-\frac{1}{h}y_{\bar{x}x}+hqy=hf, \qquad x=1-h, \\ & y_{\bar{x}\bar{x}}+\frac{h^2}{2}qy=\frac{h^2}{2}f, \qquad x=1. \end{aligned} \tag{54}$$

Precisamente éste es el problema en diferencias que aproxima el problema (52). Para verificar que su error de aproximación es la magnitud $O(h^2)$ es necesario escribir primeramente las combinaciones lineales de las ecuaciones primera y segunda y las de las ecuaciones última y penúltima en vez de las correlaciones segunda y penúltima.

A saber, en vez de la segunda tenemos:

$$y_{xx\bar{x}}(h)+hqy(h)+\frac{h}{2}qy(0)=hf(h)+\frac{h}{2}f(0),$$

y en vez de la penúltima:

$$-y_{\bar{x}x\bar{x}}(1-h)+hqy(1-h)+\frac{h}{2}qy(1)=hf(1-h)+\frac{h}{2}f(1).$$

Recurriendo ahora a la fórmula de Taylor, nos cercioraremos de que el error de aproximación del problema (54) es realmente igual a $O(h^2)$.

6. **Método de Bubnov — Galerkin.** Es otro método de proyección, el cual es muy próximo al método de Ritz, expuesto en el p. 2, pero que tiene un dominio de aplicación algo más extendido. También este método se aplica cuando el problema no es autoconjugado o de signo determinado. Estudiemos el método de Bubnov — Galer-

kin con el ejemplo del siguiente problema:

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right)+r(x)\frac{du}{dx}-q(x)u=-f(x), \quad 0<x<1,$$
$$k(0)u'(0)=\varkappa_0 u(0)-g_0, \quad -k(1)u'(1)=\varkappa_1 u(1)-g_1. \tag{55}$$

Recordemos (véase § 2 del cap. I) que se llama solución generalizada del problema (55) a la función $u(x)\in W_2^1[0, 1]$ la cual, cualquiera que sea la función $v(x)\in W_2^1[0, 1]$, verifica la identidad integral

$$\int_0^1 (ku'v'-ru'v+quv-fv)\,dx+$$
$$+\varkappa_0 u(0)v(0)+\varkappa_1 u(1)v(1)-g_0 v(0)-g_1 v(1)=0. \tag{56}$$

Sea, como antes, V_n una sucesión de subespacios de dimensión finita del espacio $W_2^1[0, 1]$. Buscaremos la solución aproximada $u_n(x)\in$ $\in V_n$ del problema (55) con tal que las funciones $v_n(x)\in V_n$ verifiquen la identidad (56). Sea que $\bar{\omega}$ es una red uniforme en el $[0, 1]$ con el paso $h=1/N$, V_n es el espacio de funciones continuas lineales a trozos, introducido anteriormente, y $\eta_i^{(n)}(x)$ son sus funciones de coordenadas, dadas por las correlaciones (25) y (26). También como antes, buscaremos la solución aproximada $u_{N+1}(x)$ en la forma

$$u_{N+1}(x)=\sum_{j=0}^{N} y_j\eta_j^{(N+1)}(x). \tag{57}$$

Suponiendo que

$$v(x)=\eta_i^{(N+1)}(x)$$

y sustituyendo $u(x)$ de la (56) por la expresión (57), tenemos

$$\sum_{j=0}^{N}\left\{\int_0^1\left[k(x)y_j\frac{d}{dx}\eta_j^{(N+1)}\frac{d}{dx}\eta_i^{(N+1)}-r(x)y_j\frac{d}{dx}\eta_j^{(N+1)}\eta_i^{(N+1)}+\right.\right.$$
$$\left.+q(x)y_j\eta_i^{(N+1)}\eta_j^{(N+1)}-f(x)\eta_i^{(N+1)}\right]dx+$$
$$+\varkappa_0 y_j\eta_j^{(N+1)}(0)\,\eta_i^{(N+1)}(0)+\varkappa_1 y_j\eta_j^{(N+1)}(1)\,\eta_i^{(N+1)}(1)-$$
$$\left.-g_0\eta_j^{(N+1)}(0)-g_1\eta_j^{(N+1)}(1)\right\}=0.$$

Teniendo en cuenta la forma (25) y (26) de las funciones de coordenadas $\eta_j(x)$, de aquí obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\alpha_{i,\,i-1}y_{i-1}+\alpha_{i,\,i}y_i+\alpha_{i,\,i+1}y_{i+1}-\beta_i=0,$$
$$i=1,\ 2,\ \ldots,\ N-1, \tag{58}$$
$$\alpha_{0,\,0}y_0+\alpha_{0,\,1}y_1-\beta_1=0, \quad \alpha_{N,\,N-1}y_{N-1}+\alpha_{N,\,N}y_N-\beta_N=0,$$

donde

$$\alpha_{i,\,i-1}=h^{-2}\Big[-\int_{x_{i-1}}^{x_i} k(x)\,dx+\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x-x_{i-1})\,r(x)\,dx+ + \int_{x_{i-1}}^{x_i}(x_i-x)(x-x_{i-1})\,q(x)\,dx\Big],$$

$$\alpha_{i,\,i}=h^{-2}\Big[\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} k(x)\,dx-\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x-x_{i-1})\,r(x)\,dx+ + \int_{x_i}^{x_{i+1}}(x_{i+1}-x)\,r(x)\,dx+\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x-x_{i-1})^2q(x)\,dx+ + \int_{x_i}^{x_{i+1}}(x_{i+1}-x)^2q(x)\,dx\Big],$$

$$\alpha_{i,\,i+1}=h^{-2}\Big[-\int_{x_i}^{x_{i+1}} k(x)\,dx-\int_{x_i}^{x_{i+1}}(x_{i+1}-x)\,r(x)\,dx+ + \int_{x_i}^{x_{i+1}}(x-x_i)(x_{i+1}-x)\,q(x)\,dx\Big],\qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ N-1,$$

$$\alpha_{0,\,0}=h^{-2}\Big[\int_0^h k(x)\,dx+\int_0^h(h-x)\,r(x)\,dx+\int_0^h(h-x)^2q(x)\,dx\Big]+\varkappa_0,$$

$$\alpha_{0,\,1}=h^{-2}\Big[-\int_0^h k(x)\,dx-\int_0^h(h-x)\,r(x)\,dx+\int_0^h x(h-x)\,q(x)\,dx\Big],$$

$$\alpha_{N,\,N-1}=h^{-2}\Big[-\int_{1-h}^{1} k(x)\,dx+\int_{1-h}^{1}(x-1+h)\,r(x)\,dx+ + \int_{1-h}^{1}(1-x)(x-1+h)\,q(x)\,dx\Big],$$

$$\alpha_{N,\,N}=h^{-2}\Big[\int_{1-h}^{1} k(x)\,dx-\int_{1-h}^{1}(1-x)\,r(x)\,dx+ + \int_{1-h}^{1}(1-x)^2q(x)\,dx\Big]+\varkappa_1,$$

$$\beta_i = h^{-1}\left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1}) f(x)\,dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - x) f(x)\,dx\right],$$
$$i = 1, 2, \ldots, N-1,$$

$$\beta_0 = h^{-1}\int_0^h (h - x) f(x)\,dx + g_0,$$

$$\beta_1 = h^{-1}\int_{1-h}^{1} (x - 1 + h) f(x)\,dx + g_1.$$

Introduciendo las designaciones:

$$a_i = h^{-1}\left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} k(x)\,dx - \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x_i - x)(x - x_{i-1})\, q(x)\,dx\right],$$
$$i = 1, 2, \ldots, N,$$

$$d_i = h^{-2}\left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1})\, q(x)\,dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - x)\, q(x)\,dx\right],$$
$$i = 1, 2, \ldots, N-1,$$

$$b_i^- = h^{-2}\int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1})\, r(x)\,dx, \qquad i = 1, 2, \ldots, N,$$

$$b_i^+ = h^{-2}\int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - x)\, r(x)\,dx, \qquad i = 0, 1, \ldots, N-1;$$

$$d_0 = 2h^{-2}\int_0^h q(x)(h - x)\,dx,$$

$$d_N = 2h^{-2}\int_{1-h}^{1} (x - 1 + h)\, q(x)\,dx;$$

$$\varphi_i = h^{-1}\beta_i = h^{-2}\left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1}) f(x)\,dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - x) f(x)\,dx,\right.$$
$$i = 1, 2, \ldots, N-1,$$

$$\varphi_0 = 2h^{-2} \int_0^h (h-x) f(x)\, dx,$$

$$\varphi_N = 2h^{-2} \int_{1-h}^{1} (x-1+h) f(x)\, dx,$$

podemos escribir el sistema (58) en la forma

$$\begin{aligned} &(ay_{\bar{x}})_x + b^+ y_x + b^- y_{\bar{x}} - dy = -\varphi, \quad x = h,\ 2h,\ \ldots,\ 1-h, \\ &(a_1 + b_0^+ h)\, y_x = (\varkappa_0 + 0{,}5hd_0)\, y - (g_0 + 0{,}5h\varphi_0), \qquad x = 0, \\ &-(a_N - hb_N^-)\, y_{\bar{x}} = (\varkappa_1 + 0{,}5hd_N)\, y - (g_1 + 0{,}5h\varphi_N), \qquad x = 1. \end{aligned} \tag{59}$$

Si $r(x) \equiv 0$, es evidente que el problema (59) se convierte por completo en el problema (30). Si los coeficientes $k(x)$, $g(x)$ y $r(x)$ son constantes, a_i, d_i, b_i^+ y b_i^- se pueden hallar en la forma explícita

$$a_i = a = k - \frac{h^2}{6}\, q, \quad d_i = d = q, \quad b_i^- = b_i^+ = \frac{r}{2}.$$

7. Método de aproximación de la identidad integral. Este método se refiere al método de Bubnov—Galerkin del mismo modo que el método de aproximación de la funcional al método de Ritz.

Como modelo del método de aproximación de la identidad integral tomemos la construcción del esquema en diferencias para el problema (55). La identidad integral (56), que determina la solución generalizada del problema (55) en la red uniforme $\bar{\omega}$, se aproxima por la identidad sumadora:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{N} k\left(x_i - \frac{h}{2}\right)\left(\frac{y_i - y_{i-1}}{h}\right)\left(\frac{v_i - v_{i-1}}{h}\right) h + \\ &+ \sum_{i=1}^{N-1} \left[-r(x_i)\left(\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}\right) v_i + q(x_i)\, y_i v_i - f(x_i)\, v_i \right] h + \\ &+ \frac{h}{2}\left[q(0)\, y_0 v_0 - f(0)\, v_0 + q(1)\, y_N v_N - f(1)\, v_N\right] + \\ &\qquad + \varkappa_0 y_0 v_0 + \varkappa_1 y_N v_N - g_0 v_0 - g_1 v_N = 0. \end{aligned}$$

En esta identidad v_i es una función de red arbitraria. Escogiéndola igual a la unidad en uno de los nodos de la red e igual a cero en los demás nodos, obtendremos la ecuación en aquel punto donde v_i es diferente de cero. Pasando de este modo todos los nodos, obtendre-

mos el siguiente esquema en diferencias:

$$\left(k\left(x-\frac{h}{2}\right)y_{\bar{x}}\right)_x+r(x)\,y_{\overset{\circ}{x}}-q(x)\,y=-f(x), \qquad x\in\omega,$$

$$\left(k\left(\frac{h}{2}\right)+h\,\frac{r(0)}{2}\right)y_x=\left(\varkappa_0+\frac{h}{2}q(0)\right)y-\left(g_0+\frac{h}{2}f(0)\right), \quad x=0,$$

$$-\left(k\left(1-\frac{h}{2}\right)-\frac{h}{2}r(1)\right)y_{\bar{x}}=\left(\varkappa_1+\frac{h}{2}q(1)\right)y-\left(g_1+\frac{h}{2}f(1)\right),$$
$$x=1.$$

8. **Elevación del orden del error de aproximación en las soluciones de las ecuaciones que se aproximan.** En el § 1 se han aportado como ejemplo los dos esquemas en diferencias (6) y (7) para la ecuación (5), los cuales difieren únicamente en la aproximación del segundo miembro, no obstante, el primero tiene el error de $O(h^2)$ en tanto que el segundo, de $O(h^4)$. Describamos el procedimiento de construcción del esquema (7) del § 1.
Para la ecuación

$$Lu\equiv u''=-f(x) \tag{60}$$

escribamos inicialmente la aproximación elemental

$$L_h y_i=\frac{y_{i-1}-2y_i+y_{i+1}}{h^2}=-\varphi_i, \qquad \varphi_i=f(x_i),$$

y calculemos su error suponiendo que $u(x)\in C^{(6)}$. Según la definición

$$\psi(x)=L_h u+\varphi,$$

a su vez

$$L_h u=Lu+\frac{h^2}{12}L^2u+O(h^4), \tag{61}$$

y, por lo tanto,

$$\psi(x)=\frac{h^2}{12}L^2u+O(h^4). \tag{62}$$

A base de la (60) hallamos que $L^2u=-Lf$. Sustituyendo este valor de L^2u en (62), tendremos que

$$\psi(x)+\frac{h^2}{12}f''(x)=O(h^4). \tag{63}$$

De (63) se desprende que para escribir el esquema en diferencias el cual tiene el error de aproximación de $O(h^4)$, es suficiente que el error de aproximación $\bar{\psi}(x)$ de dicho esquema se represente en la forma

$$\bar{\psi}(x)=\psi(x)+\frac{h^2}{12}f''(x),$$

donde $\psi(x)$ se determina mediante la correlación (62). Es fácil escribir un esquema con este error: a título del segundo miembro de este esquema se toma la función

$$\bar{\varphi}(x) = f(x) + \frac{h^2}{12} f''(x), \tag{64}$$

y este esquema tendrá la forma

$$L_h y = -\bar{\varphi}(x).$$

Está claro que, sin disminuir el orden del error de aproximación en la (64), se puede poner en cambio de $f''(x)$ la segunda razón en diferencias de la función $f(x)$, es decir, $f_{\bar{x}x}(x)$, $\bar{\varphi} = f + \frac{h^2}{12} f_{\bar{x}x}$.

Así mismo se puede construir la aproximación en diferencias (10), indicada en el § 1, de la condición de frontera del tercer género del problema (8) del § 1. Señalemos que esta aproximación ya fue construida según el método de equilibrio. Escribamos de nuevo la aproximación elemental de esta condición:

$$l_h y = \frac{y_1 - y_0}{h} = \varkappa y_0 - \nu_0, \qquad \nu_0 = g_0,$$

y calculemos su error:

$$\psi_0 = \frac{u_1 - u_0}{h} - \varkappa u_0 + \nu_0 =$$

$$= u'(0) + \frac{h}{2} u''(0) - \varkappa u(0) + g_0 + O(h^2) = \frac{h}{2} u''(0) + O(h^2).$$

A base de la ecuación (8) del § 1 tenemos $u''(0) = -f(0)$. Por lo tanto

$$\psi_0 + \frac{h}{2} f(0) = O(h^2). \tag{65}$$

En (65) se ve que para escribir la aproximación en diferencias con el error de $O(h^2)$ es suficiente escoger el segundo miembro $\bar{\nu}_0$ igual a $\bar{\nu}_0 = g_0 + \frac{h}{2} \varphi_0$,

$$l_h y = \frac{y_1 - y_0}{h} = \varkappa y_0 - \bar{\nu}_0.$$

Analicemos dos ejemplos más de elevación del orden del error de aproximación de los esquemas (para las ecuaciones con los coeficientes constantes). Tomemos primeramente la ecuación

$$u'' - qu = -f(x), \tag{66}$$

donde $q = \text{const}$. La aproximación elemental de esta ecuación tiene la forma

$$L_h y = y_{\bar{x}x} - qy = -\varphi, \qquad \varphi = f(x).$$

Su error es

$$\psi(x)=L_h u+\varphi=$$

$$=u''(x)+\frac{h^2}{12}u^{IV}(x)+O(h^4)-qu+f=\frac{h^2}{12}u^{IV}+O(h^4).$$

A base de la ecuación (66) hallamos que

$$u^{IV}=qu''(x)-f''(x)=q^2u-qf-f''.$$

Sustituyendo este valor de $u^{IV}(x)$ en la expresión para $\psi(x)$, nos resulta que

$$\psi(x)-\frac{h^2}{12}(q^2u-qf-f'')=O(h^4).$$

También como antes, de aquí se deduce que para escribir un esquema en diferencias que tiene el error de aproximación de $O(h^4)$ es suficiente que el error de aproximación de este esquema se represente en la forma

$$\bar{\psi}(x)=\psi(x)-\frac{h^2}{12}(q^2u-qf-f'').$$

Ahora ya no es suficiente cambiar sólo la parte derecha del esquema, también es necesario cambiar el coeficiente de y. Es evidente que un esquema en diferencias, el que tiene el error de aproximación de $O(h^4)$, se puede admitir en la forma

$$y_{\bar{x}x}-q\left(1+\frac{h^2}{12}q\right)y=-\left[f+\frac{h^2}{12}(qf+f'')\right].$$

Finalmente, consideremos la ecuación

$$u''+ru'-qu=-f(x), \tag{67}$$

donde $r=\text{const}$ y $q=\text{const}$. Es muy evidente la siguiente aproximación de esta ecuación:

$$y_{\bar{x}x}+\frac{1}{2}r(y_x+y_{\bar{x}})-qy=-f.$$

Calculemos el error de aproximación de este esquema:

$$\psi=u''+\frac{h^2}{12}u^{IV}+ru'+\frac{h^2}{6}ru'''-qu+f+O(h^4)=$$

$$=\frac{h^2}{12}(u^{IV}+2ru''')+O(h^4).$$

A base de la ecuación (67) hallamos que

$$u'''=(r^2+q)u'-rqu+rf-f',$$

$$u^{IV}=-(r^3+2rq)u'+(r^2q+q^2)u+rf'-qf-f''-r^2f.$$

Sustituyendo estos valores de u''' y de u^{IV} en la expresión para ψ, obtendremos

$$\psi=\frac{h^2}{12}\left[r^3u'+q(q-r^2)u-(q-r^2)f-rf'-f''\right]+O(h^4)=$$
$$=\frac{h^2}{12}\left[\frac{1}{2}r^3(u_x+u_{\bar{x}})+q(q-r^2)u-(q-r^2)f-rf'-f''\right]+O(h^4).$$

De aquí se desprende que el esquema incógnito debe ser de la forma

$$y_{\bar{x}x}+\frac{1}{2}r\left(1-\frac{h^2}{12}r^2\right)(y_x+y_{\bar{x}})-q\left(1+\frac{h^2}{12}(q-r^2)\right)y=$$
$$=-\left[f+\frac{h^2}{12}((q-r^2)f+rf'+f'')\right].$$

9. **Esquemas del orden elevado de precisión para la ecuación con los coeficientes variables.** Consideremos a título de ejemplo la ecuación

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right)=-f(x). \tag{68}$$

Para esta ecuación según procedimientos diferentes estuvo construido el esquema

$$(ay_{\bar{x}})_x=-\varphi(x), \tag{69}$$

cuyos coeficientes $a(x)$ y $\varphi(x)$ se calculan mediante distintas fórmulas de los métodos de equilibrio, de Ritz y de aproximación de la funcional. Pero con cualquiera de los procedimientos mencionados de cálculo de los coeficientes el esquema (69) tiene el mismo error de aproximación de $O(h^2)$.

Del p. 2 del § 2 se deduce que el esquema (69) tiene la aproximación del segundo orden, si

$$\frac{a(x+h)+a(x)}{2}=k(x)+O(h^2),\qquad \frac{a(x+h)-a(x)}{h}=k'(x)+O(h^2),$$
$$\varphi(x)=f(x)+O(h^2).$$

Para la ecuación (68) se puede escribir el esquema preciso de tres puntos. Este tiene la forma

$$(\mathring{a}y_{\bar{x}})_x=-\mathring{\varphi}(x), \tag{70}$$

$$\text{donde } \mathring{a}_i=\left(\frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{dx}{k(x)}\right)^{-1},$$

$$\mathring{\varphi}_i=\frac{1}{h^2}\left[\mathring{a}_{i+1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{dx}{k(x)}\int_{x_i}^{x}f(x')\,dx'+\mathring{a}_i\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{dx}{k(x)}\int_{x}^{x_i}f(x')\,dx'\right].$$

Toda solución de la ecuación diferencial (68) es la solución de la ecuación en diferencias (70), esto es,

$$y_i = u_i = u\,(x_i).$$

Para obtener un esquema exacto, integremos la ecuación (68) entre x_i y x y dividamos en $k\,(x)$:

$$u'\,(x) = \frac{(ku')_i}{k\,(x)} + \frac{1}{k\,(x)} \int\limits_{x_i}^{x} f\,(x')\,dx'. \tag{71}$$

Integrando luego (71) respecto a x entre x_{i-1} y x_i y entre x_i y x_{i+1} y multiplicando por $\overset{\circ}{a}_i h^{-1}$ y $\dot{a}_{i+1} h^{-1}$, obtendremos:

$$\overset{\circ}{a}_i\, \frac{u_i - u_{i-1}}{h} = (ku')_i + \overset{\circ}{a}_i\, \frac{1}{h} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k\,(x)} \int\limits_{x_i}^{x} f\,(x')\,dx',$$

$$\overset{\circ}{a}_{i+1}\, \frac{u_{i+1} - u_i}{h} = (ku')_i + \overset{\circ}{a}_{i+1}\, \frac{1}{h} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dx}{k\,(x)} \int\limits_{x_i}^{x} f\,(x')\,dx'.$$

Después de la eliminación de (ku') obtenemos: $(\dot{a} u_{\bar{x}})_x = -\dot{\varphi}\,(x)$, donde $\dot{a}$ y $\overset{\circ}{\varphi}$ están determinados más arriba.

Desde luego el empleo práctico de este esquema se obstaculiza mucho por la presencia de las integrales para $\dot{a}$ y $\dot{\varphi}$, cuya exactitud de cálculo determina, sin duda, la precisión efectiva del esquema.

Para una ecuación del segundo orden

$$\frac{d}{dx}\left(k\,(x)\,\frac{du}{dx}\right) - q\,(x)\,u = -f\,(x), \quad 0 < x < 1,$$

se puede construir el esquema homogéneo de tres puntos el que será exacto en una red no uniforme arbitraria. Para esto se emplea otro método, fundado en que la solución de la ecuación señalada de segundo orden en un punto arbitrario se puede expresar a través de los valores de dicha ecuación en los extremos de cualquier intervalo que contiene este punto escogido. Tomando a título de tres puntos los nodos de la red, obtenemos el esquema en diferencias de tres puntos. Este tiene la forma

$$(ay_{\bar{x}})_x - dy = -\varphi.$$

Sus coeficientes a, d y φ son las funcionales de los coeficientes $k\,(x)$, $q\,(x)$ y $f\,(x)$ de la ecuación diferencial.

Nos detenemos en el método de hallar el esquema en diferencias $O\,(h^4)$ para la ecuación (68) estudiando inmediatamente el error de aproximación del esquema conservador. Volvamos a escribir la

ecuación (68) en una forma más conveniente

$$Lu = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{p(x)}\frac{du}{dx}\right) = -f(x), \qquad p(x) = \frac{1}{k(x)}. \tag{72}$$

Lu se aproxima por el operador de tres puntos

$$\Lambda y = \left(\frac{1}{a} y_{\bar{x}}\right)_x$$

del segundo orden de aproximación:

$$\psi = \Lambda u - Lu = O(h^2).$$

Como se ha mostrado en el p. 2 del § 2, esto tiene lugar al cumplir las condiciones

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\left[\frac{1}{a(x+h)} + \frac{1}{a(x)}\right] = \frac{1}{p(x)} + O(h^2), \\ &\frac{1}{h}\left[\frac{1}{a(x+h)} - \frac{1}{a(x)}\right] = \left(\frac{1}{p}\right)' + O(h^2). \end{aligned} \tag{73}$$

Supondremos que $a(x)$ se determina con auxilio de la funcional lineal modelo $A[\bar{p}(s)]$, $-1 \leqslant s \leqslant 0$, así que

$$a(x) = A[p(x+sh)], \qquad -1 \leqslant s \leqslant 0.$$

Desarrollando

$$p(x+sh) = p(x) + shp'(x) + \frac{h^2}{2} s^2 p''(x) + O(h^3)$$

y

$$p(x+h+sh) = p(x) + (1+s)hp'(x) + \frac{h^2}{2}(1+s)^2 p''(x) + O(h^3),$$

hallamos

$$a(x) = p(x)A[1] + hp'(x)A[s] + \frac{h^2}{2}p''(x)A[s^2] + O(h^3),$$

$$a(x+h) = p(x)A[1] + hp'(x)A[1+s] + \\ + \frac{h^2}{2}p''(x)A[(1+s)^2] + O(h^3).$$

Pondremos estas expresiones en las condiciones (73) del segundo orden de aproximación. Evidentemente, $A[1] = 1$.

A continuación tenemos

$$\frac{1}{h}\left[\frac{1}{a(x+h)} - \frac{1}{a(x)}\right] = \\ = \frac{1}{hp(x)}\left[\left(1 - \frac{hp'}{p}A[1+s] - \frac{h^2}{2p}p''A[(1+s)^2] + \right.\right.$$

$$+h^2\left(\frac{p'}{p}\right)^2 A^2[1+s]+O(h^3)\Big)-\Big(1-\frac{hp'}{p}A[s]-\frac{h^2}{2p}p''A[s^2]+$$
$$+h^2\left(\frac{p'}{p}\right)^2 A^2[s]+O(h^3)\Big)\Big]=$$
$$=\left(\frac{1}{p}\right)'-\frac{h}{2}\left(\frac{p'}{p^2}\right)'A[1+2s]+O(h^2)=\left(\frac{1}{p}\right)'+O(h^2),$$

si $A[1+2s]=0$, o sea $A[s]=-0{,}5$.

Con esto se verifica también la primera de las condiciones (73)

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a(x)}+\frac{1}{a(x+h)}\right)=$$
$$=\frac{1}{p(x)}-\frac{hp'}{p^2}A[s+0{,}5]+O(h^2)=\frac{1}{p(x)}+O(h^2).$$

Mostremos que, al cumplir las condiciones

$$A[1]=1,\quad A[s]=-1/2,\quad A[s^2]=1/3,\quad A[s^3]=-1/4 \qquad (74)$$

el error de aproximación $\psi=\Lambda u-Lu$ se puede representar en la forma

$$\psi=\Lambda u-Lu=\frac{h^2}{12}L(pLu)+O(h^4)=\frac{h^2}{12}\left(\frac{1}{p}(pLu)'\right)'+O(h^4).$$

Para ello desarrollemos $a(x)$ en el entorno del punto $\bar{x}=x-0{,}5h$. Designando $p(\bar{x})=\bar{p}(x)$, etc., se obtendrá

$$a(x)=A[p(x+sh)]=A[p(x-0{,}5h+(s+0{,}5)h]=$$
$$=A\Big[\bar{p}+h(s+0{,}5)\bar{p}'+\frac{h^2}{2}(s+0{,}5)^2\bar{p}''+\frac{h^3}{6}(s+0{,}5)^3\bar{p}'''+$$
$$+\frac{h^4}{24}(s+0{,}5)^4\bar{p}^{IV}+O(h^5)\Big]=\bar{p}+h\bar{p}'A\left[s+\frac{1}{2}\right]+$$
$$+\frac{h^2}{2}\bar{p}''A[(s+0{,}5)^2]+\frac{h^3}{6}\bar{p}'''A[(s+0{,}5)^3]+$$
$$+\frac{h^4}{24}\bar{p}^{IV}A[(s+0{,}5)^4]+O(h^5).$$

Después, teniendo presente que $A[s+0{,}5]=A[s]+0{,}5=0$,

$$A[(s+0{,}5)^2]=A\left[s^2+s+\frac{1}{4}\right]=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{1}{12},$$
$$A[(s+0{,}5)^3]=$$
$$=A[s^3]+\frac{3}{2}A[s^2]+\frac{3}{4}A[s]+\frac{1}{8}=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=0,$$

se puede escribir

$$a(x)=\bar{p}+\frac{h^2}{24}\bar{p}''+\frac{h^4}{24}\bar{p}^{IV}A[(s+0{,}5)^4]+O(h^5),$$
$$a(x+h)=p(\bar{x}+h)+\frac{h^2}{24}p''(\bar{x}+h)+$$
$$+\frac{h^4}{24}p^{IV}(\bar{x}+h)A[(s+0{,}5)^4]+O(h^5).$$

También nos harán falta las expresiones

$$u(x) = u(\bar{x}) + \frac{h}{2} u'(\bar{x}) + \frac{h^2}{8} u''(\bar{x}) + \frac{h^3}{48} u'''(\bar{x}) + \\ + \frac{h^4}{16\cdot 24} u^{\mathrm{IV}}(\bar{x}) + \frac{h^5}{32\cdot 120} u^{\mathrm{V}}(\bar{x}) + O(h^6),$$

$$u(x-h) = u(\bar{x}) - \frac{h}{2} u'(\bar{x}) + \frac{h^2}{8} u''(\bar{x}) - \frac{h^3}{48} u'''(\bar{x}) + \\ + \frac{h^4}{16\cdot 24} u^{\mathrm{IV}}(\bar{x}) - \frac{h^5}{32\cdot 120} u^{\mathrm{V}}(\bar{x}) + O(h^6).$$

De aquí se deduce que

$$\frac{1}{a} u_{\bar{x}} = \frac{1}{\bar{p}} \left(1 - \frac{h^2}{24} \frac{p''(\bar{x})}{p(\bar{x})} + \alpha(\bar{x}) h^4\right) \times \\ \times \left(u'(\bar{x}) + \frac{h^2}{24} u'''(\bar{x}) + \beta(\bar{x}) h^4\right) + O(h^5) = \\ = \left[\frac{u'}{p} + \frac{h^2}{24}\left(\frac{u'''}{p} - \frac{p''}{p^2} u'\right)\right]_{x=\bar{x}} + \gamma(\bar{x}) h^4 + O(h^5),$$

es decir,

$$\frac{1}{a} u_{\bar{x}} = \left(\frac{u'}{p}\right)_{x=\bar{x}} + h^2 \delta(\bar{x}) + \gamma(\bar{x}) h^4 + O(h^5),$$

donde

$$\delta(\bar{x}) = \frac{1}{24}\left(\frac{u'''}{p} - \frac{p''}{p^2} u'\right)_{x=\bar{x}},$$

$$\gamma(\bar{x}) = \frac{\beta(\bar{x})}{p(\bar{x})} + \frac{\alpha(\bar{x})\, u'(\bar{x})}{p(\bar{x})} - \frac{p''}{576 p^2(\bar{x})} u'''(\bar{x}),$$

$$\beta(\bar{x}) = \frac{u^{\mathrm{V}}(\bar{x})}{16\cdot 120},$$

$$\alpha(\bar{x}) = -\frac{p^{\mathrm{IV}}(\bar{x})}{p(\bar{x})} \frac{A[(s+0,5)^4]}{24} + \frac{(p''(\bar{x}))^2}{576 p^2(\bar{x})}.$$

Después hagamos uso de las fórmulas:

$$w(\bar{x}) = w(x) - 0,5hw'(x) + \frac{h^2}{8} w''(x) - \\ - \frac{h^3}{48} w'''(x) + \frac{h^4}{16\cdot 24} w^{\mathrm{IV}} + O(h^5),$$

$$w(\bar{x}+h) = w(x) + 0,5hw'(x) + \frac{h^2}{8} w''(x) + \\ + \frac{h^3}{48} w'''(x) + \frac{h^4}{16\cdot 24} w^{\mathrm{IV}}(x) + O(h^5),$$

$$(w(\bar{x}))_x = \frac{w(\bar{x}+h) - w(\bar{x})}{h} = w'(x) + \frac{h^2}{24} w'''(x) + O(h^4).$$

Basándose en ésta y en la fórmula para $w = \frac{1}{a} u_{\bar{x}}$ se desprende:

$$\left(\frac{1}{a} u_{\bar{x}}\right)_x = w_x = \left(\frac{u'}{p}\right)' + \frac{h^2}{24}\left[\left(\frac{u'}{p}\right)'' + \frac{u'''}{p} - \frac{p''}{p^2} u'\right]' + O(h^4).$$

Transformemos la expresión comprendida entre corchetes considerando que

$$\left(\frac{u'}{p}\right)'' = \left(\frac{u''}{p} + u'\left(\frac{1}{p}\right)'\right)' = \frac{u'''}{p} + 2\left(\frac{1}{p}\right)' u'' + \left(\frac{1}{p}\right)'' u',$$

$$\frac{u''}{p} = \left(\frac{u'}{p}\right)' - \left(\frac{1}{p}\right)' u' = \left(\frac{u'}{p}\right)' + \frac{p'}{p^2} u',$$

$$\left(\frac{1}{p}\right)'' = -\left(\frac{p'}{p^2}\right)' = -\frac{p''}{p^2} + \frac{2(p')^2}{p^3},$$

y, por consecuencia,

$$\left(\frac{u'}{p}\right)'' + \frac{u'''}{p} - \frac{p''}{p^2} u' = 2\left(\frac{u'}{p}\right)'' - \frac{p''}{p^2} u' + \frac{p''}{p^2} u' -$$

$$- 2\frac{(p')^2}{p^3} u' + \frac{2p'}{p^2} u'' = 2\left(\frac{u'}{p}\right)'' + 2\frac{p'}{p}\left(\frac{u'}{p}\right)' = 2\frac{1}{p}\left(p\left(\frac{u'}{p}\right)'\right)'.$$

De esa guisa, llegamos a la siguiente expresión para el error de aproximación:

$$\psi = \Lambda u - Lu = \left(\frac{1}{a} u_{\bar{x}}\right)_x - \left(\frac{1}{p} u'\right)' = \frac{h^2}{12}\left(\frac{1}{p}\left(p\left(\frac{u'}{p}\right)'\right)'\right)' + O(h^4),$$

o bien

$$\psi = \frac{h^2}{12} L(pLu) + O(h^4).$$

Sea $u = u(x)$ la solución de la ecuación $Lu = (\frac{1}{p} u')' = -f(x)$. Entonces,

$$\psi(x) = -\frac{h^2}{12} L(pf) + O(h^4).$$

Dado que

$$L(pf) = \left(\frac{1}{p}(pf)'\right)' = \Lambda(pf) + O(h^2),$$

el esquema en diferencias

$$\Lambda y = \left(\frac{1}{a} y_{\bar{x}}\right)_x = -\varphi, \quad \varphi = f + \frac{h^2}{12} \Lambda(pf) \qquad (75)$$

tiene el cuarto orden de aproximación en la solución $u = u(x)$ de la ecuación $Lu = -f(x)$, así que

$$\psi = \Lambda u + \varphi = O(h^4),$$

si $f \in C^{(4)}$, $p \in C^{(5)}$ y se cumplen las condiciones (74) para la funcional lineal

$$A[\bar{p}(s)], -1 \leqslant s \leqslant 0.$$

Escojamos la funcional elemental

$$A[\bar{p}(s)] = c_1\bar{p}(-1) + c_2 p\left(-\frac{1}{2}\right) + c_0\bar{p}(0),$$

donde c_1, c_2 y c_0 son constantes. Las condiciones (74) nos dan:

$$A[1] = c_1 + c_2 + c_0 = 1, \qquad c_2 = 1 - c_0 - c_1,$$
$$A[s] = -c_1 - 0{,}5c_2 = -0{,}5, \quad c_1 + 0{,}5c_2 = 0{,}5,$$
$$A[s^2] = c_2 + \frac{1}{4}c_1 = \frac{1}{3}.$$

A base de esto hallamos

$$c_1 = \frac{1}{6}, \quad c_2 = \frac{2}{3}, \quad c_0 = \frac{1}{6}.$$

La condición de que $A[s^3] = -\frac{1}{4}$ se cumple automáticamente.

De esta forma, para el esquema elemental (75) de cuarto orden de aproximación el coeficiente a_i es igual a

$$a_i = \frac{1}{6}(p_{i-1} + 4p_{i-1/2} + p_i).$$

CAPITULO III

ESQUEMAS EN DIFERENCIAS PARA LA ECUACIÓN DE POISSON. PRINCIPIO DE MÁXIMO

Como ya se ha señalado en el capítulo I, la ecuación de Poisson (de Laplace) es la ecuación elíptica más característica. En el presente capítulo se van a construir los esquemas en diferencias de diferentes órdenes de aproximación para la ecuación de Poisson escrita en coordenadas cartesianas, polares, cilíndricas o esféricas. Luego serán indicadas las aproximaciones de las condiciones de frontera de Dirichlet para la ecuación de Laplace, será demostrado el principio de máximo y por su medio se realizará la investigación de la solubilidad y de la velocidad de convergencia de los esquemas en diferencias construidos.

§ 1. Construcción de los esquemas en diferencias para la ecuación de Poisson

1. Aproximación de la ecuación de Poisson en las coordenadas cartesianas. Sea que en el plano Ox_1x_2 está dada la ecuación de Poisson

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = -f(x), \qquad x = (x_1,\ x_2) \tag{1}$$

y está introducida la red en diferencias rectangular uniforme Ω con el paso h_α en la dirección Ox_α, $\alpha = 1,\ 2$. En el § 1 del capítulo II fue indicada la aproximación en diferencias elemental del operador laplaciano en una red rectangular. Con auxilio del operador en diferencias introducido allí la aproximación elemental de la ecuación (1) se construye del modo evidente

$$\Lambda y \equiv y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} = -\varphi(x), \tag{2}$$

donde el miembro derecho $\varphi(x)$ se puede escoger, por ejemplo, del modo siguiente:

$$\varphi(x) = f(x). \tag{3}$$

Calculemos el error de aproximación de la ecuación (2), que tiene el miembro derecho (3), en la solución $u = u(x)$ de la ecuación (1). Tomando en consideración que

$$\Lambda_\alpha u = u_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} + \frac{h_\alpha^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x_\alpha^4} + \frac{h_\alpha^4}{360}\frac{\partial^6 u}{\partial x_\alpha^6} + O(h_\alpha^6),$$
$$\Delta u = (L_1 + L_2)u = -f(x), \quad L_\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}, \quad \alpha = 1, 2, \tag{4}$$

hallamos

$$\psi(x) = \Lambda u + \varphi(x) = (\Lambda_1 + \Lambda_2)u + \varphi(x) =$$
$$= (L_1 + L_2)u + \frac{1}{12}(h_1^2 L_1^2 u + h_2^2 L_2^2 u) + f(x) + O(|h^4|) = O(|h|^2),$$
$$|h|^2 = h_1^2 + h_2^2.$$

Por consiguiente, la ecuación (2), que tiene el miembro derecho (3), aproxima a la ecuación (1) de segundo orden.

El operador de diferencias, empleado al escribir la ecuación (2), se preestablece en el modelo elemental de cinco puntos tipo «cruz». Se puede demostrar que es imposible construir sobre este modelo una aproximación en diferencias cuyo error tiene un orden más elevado que $O(|h|^2)$. Una complicación del modelo permite construir las aproximaciones de orden más elevado. Así, en un modelo de nueve puntos tipo «cajón» se puede construir la aproximación en diferencias $O(|h|^4)$ de la ecuación (1). Si la red es cuadrada, es decir, $h_1 = h_2 = h$, en el mismo modelo se puede construir la aproximación $O(|h^6|)$. Construyamos las aproximaciones señaladas. De la (4) se deduce que

$$\Lambda u (L_1 + L_2)u + \frac{1}{12}(h_1^2 L_1^2 + h_2^2 L_2^2)u + O(|h|^4) =$$
$$= (L_1 + L_2)u + \frac{1}{12}(h_1^2 L_1 + h_2^2 L_2)(L_1 + L_2)u -$$
$$- \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} L_1 L_2 u + O(|h|^4). \tag{5}$$

Poniendo aquí $\Delta u = (L_1 + L_2)u = -f(x)$ de la (1), obtenemos

$$\Lambda u = -f(x) - \frac{1}{12}(h_1^2 L_1 + h_2^2 L_2) f - \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} L_1 L_2 u + O(|h|^4).$$

Sustituyamos $L_1 L_2 u = \partial^4 u / \partial x_1^2 \, \partial x_2^2$ por la expresión en diferencias

$$L_1 L_2 u = u_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2} + O(|u|^2) = \Lambda_1 \Lambda_2 u + O(|h|^2).$$

Nos resultará

$$\Lambda u + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12}\Lambda_1 \Lambda_2 u = -\left(f(x) + \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{h_\alpha^2}{12} L_\alpha f\right) + O(|h|^4).$$

De aquí se desprende que la ecuación en diferencias

$$\Lambda' y \equiv \Lambda y + \frac{h_1^2+h_2^2}{12} \Lambda_1 \Lambda_2 y = -\varphi(x), \tag{6}$$

cuyo miembro derecho es

$$\varphi(x) \equiv f(x) + \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{h_\alpha^2}{12} \frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha^2}, \tag{7}$$

aproxima la ecuación (1) en su solución $u = u(x)$ con el error $O(|h|^4)$.

La fórmula (7), mediante la cual se preestablece el miembro derecho de la ecuación (6), no siempre es cómoda para los cálculos debido a la necesidad de emplear las derivadas de la función $f(x)$. No obstante estas derivadas se pueden sustituir por sus aproximaciones en diferencias. Teniendo presente que

$$\partial^2 f/\partial x_\alpha^2 = f_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} O(h_\alpha^2),$$

hagamos la parte derecha de la ecuación (6) igual a

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{h_\alpha^2}{12} f_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} = f(x) + \frac{1}{12}(h_1^2 \Lambda_1 f + h_2^2 \Lambda_2 f). \tag{7'}$$

Con esto el error de aproximación del esquema será, como antes, de cuarto orden: $\psi = O(|h|^4)$.

Construyamos ahora un esquema de aproximación de sexto orden en la red cuadrada, es decir cuando $h_1 = h_2 = h$.

Utilizando el desarrollo (4), hallamos

$$\Lambda u = \Lambda_1 u + \Lambda_2 u = (L_1 + L_2) u + \frac{h^2}{12}(L_1^2 + L_2^2) u + \frac{h^4}{360}(L_1^3 + L_2^3) u + O(h^6).$$

A base de la ecuación $(L_1 + L_2) u = -f(x)$ y las correlaciones

$$(L_1^2 + L_2^2) u = (L_1 + L_2)^2 u - 2L_1 L_2 u = -(L_1 + L_2) f - 2L_1 L_2 u,$$
$$(L_1^3 + L_2^3) u = (L_1^2 - L_1 L_2 + L_2^2)(L_1 + L_2) u = -(L_1^2 - L_1 L_2 + L_2^2) f,$$

la fórmula anterior se puede escribir en la forma

$$\Lambda u = -f(x) - \frac{h^2}{12}(L_1 + L_2) f - \frac{h^4}{360}(L_1^2 - L_1 L_2 + L_2^2) f - \frac{h^2}{6} L_1 L_2 u + O(h^6).$$

Para sustituir L_1L_2u por su análogo en diferencias salvo $O(h^6)$, consideremos (4). Nos resultará

$$\Lambda_1\Lambda_2 u = L_1L_2u + \frac{h^2}{12} L_1L_2(L_1+L_2)\,u + O(h^4) =$$
$$= L_1L_2u - \frac{h^2}{12} L_1L_2 f + O(h^4).$$

Por eso se puede escribir

$$\Lambda' u = \Lambda u + \frac{h^2}{6} \Lambda_1\Lambda_2 u = -\varphi(x) + O(h^6),$$

donde

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{h^2}{12}\Delta f + \frac{h^4}{360}(\Delta^2 f + 2L_1L_2 f). \tag{8}$$

Aquí se ve que el esquema

$$\Lambda' y = -\varphi(x), \tag{9}$$

cuya parte derecha $\varphi(x)$ se determina según la fórmula (8), en la red cuadrada aproxima a la ecuación (1) con el error $O(h^6)$.

En calidad de la parte derecha del (9) se puede escoger otra función la cual conserve el orden de aproximación del esquema, pero no contenga las derivadas de la función $f(x)$. Poniendo en la (8) las expresiones

$$\Delta f = \Lambda f - \frac{h^2}{12}(\Lambda_1^2 + \Lambda_2^2) f + O(h^4),$$
$$\Delta^2 f = (\Lambda_1 + \Lambda_2)^2 f + O(h^2) = \Lambda_1^2 f + 2\Lambda_1\Lambda_2 f + \Lambda_2^2 f + O(h^2),$$
$$L_1L_2 f = \Lambda_1\Lambda_2 f + O(h^2)$$

y conservando sólo los términos $O(h^4)$, obtendremos la siguiente fórmula para la parte derecha $\varphi(x)$ de la ecuación (9)

$$\varphi = f + \frac{h^2}{12}(\Lambda_1 + \Lambda_2) f - \frac{h^4}{240}(\Lambda_1^2 + \Lambda_2^2) f + \frac{h^4}{90}\Lambda_1\Lambda_2 f. \tag{8'}$$

La fórmula (8′) quizás será más cómoda para calcular.

A veces la ecuación (1) se aproxima en la red cuadrada según el modelo de cinco puntos tipo «cruz oblicuo», el que consta de los nodos

$$(x_1,\ x_2),\quad (x_1 - h,\ x_2 - h),\quad (x_1 - h,\ x_2 + h),$$
$$(x_1 + h,\ x_2 + h),\quad (x_1 + h,\ x_2 - h).$$

Esta aproximación se construye del modo siguiente. Como es sabido, el operador laplaciano es invariante con respecto al giro del sistema de coordenadas. Hagamos girar el sistema inicial de coordenadas un ángulo de $\pi/4$ a la vez que la red Ω permanece en su lugar. En tal caso el modelo indicado más arriba será en el nuevo sistema de coordenadas un modelo corriente tipo «cruz», mas la distancia entre

sus nodos contiguos no será h, sino $\sqrt{2h}$. Consecuentemente la nueva ecuación se puede aproximar sobre este modelo del modo habitual y esta aproximación en el sistema de coordenadas antiguo tomará la forma

$$\frac{1}{2h^2}\{y(x_1-h,\ x_2-h)+y(x_1-h,\ x_2+h)+y(x_1+h,\ x_2-h)+ \\ +y(x_1+h,\ x_2+h)-4y(x_1,\ x_2)\}=-f(x_1,\ x_2). \quad (10)$$

Volviendo a escribir la ecuación (10) empleando las designaciones del § 1 del capítulo II, hallamos

$$y_{\bar{x}_1x_1}+y_{\bar{x}_2x_2}+\frac{h^2}{2}y_{\bar{x}_1x_1\bar{x}_2x_2}=\Lambda_1y+\Lambda_2y+\frac{h^2}{2}\Lambda_1\Lambda_2y=-f(x). \quad (11)$$

Es obvio que el error de aproximación de la ecuación (11) es una magnitud de orden de $O(h^2)$.

2. **Redes triangulares y hexagonales.** Además de las redes cuadradas y rectangulares, para la aproximación de la ecuación de Poisson se emplean a veces las redes regulares compuestas de triángulos regulares (fig. 6) o de sexángulos regulares (fig. 7) con el lado h.

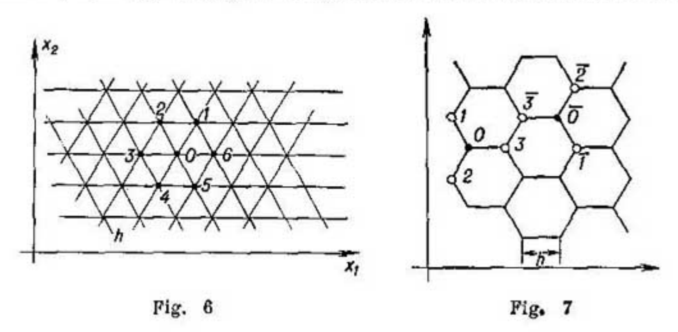


Fig. 6 Fig. 7

Construyamos en estas redes las aproximaciones en diferencias de la ecuación (1). Señalemos inicialmente que la construcción de la aproximación en diferencias para la ecuación (1) en una red hexagonal aproximando las derivadas de la (1) es imposible, puesto que la aproximación de la segunda derivada en cualquier dirección exige que por lo menos tres puntos se encuentren en una misma recta que pasa en esta dirección. Tampoco utilizaremos este procedimiento al construir el esquema sobre la red triangular.

Sean $x^{(0)}$ cierto nodo de una u otra red y $x^{(i)}$, $i=1, 2, \ldots, n$, sus nodos vecinos. Hagamos salir del $x^{(0)}$ n rayos que pasan por los nodos $x^{(i)}$ vecinos del $x^{(0)}$. Denotemos estos rayos por $l_1, l_2, \ldots, l_n$. El ángulo entre el rayo l_i y el eje x_1 lo designemos a través de $\theta_i =$

$= + 2\pi i/n$, donde el ángulo θ es el punto de referencia. Introduzcamos la razón en diferencias derecha a lo largo del rayo l_1 mediante la correlación

$$y_{l_i} = \frac{y(x^{(i)}) - y(x^{(0)})}{h}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

y construimos el operador

$$\mathscr{L}y = \sum_{i=1}^{n} y_{l_i}. \tag{12}$$

Investiguemos sus propiedades asintóticas cuando $h \to 0$. Es evidente que

$$\mathscr{L}u = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial l_i} + \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial l_i^2} + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial l_i^3} + \frac{h^3}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial l_i^4} + \frac{h^4}{120} \frac{\partial^5 u}{\partial l_i^5} \right) + O(h^5). \tag{13}$$

Las derivadas de (13) en la dirección de l_i expresémoslas a través de las derivadas con respecto a x_1 y x_2. Al hacer cálculos, poco complicados, hallamos que

$$\frac{\partial}{\partial l_i} = \cos\theta_i \frac{\partial}{\partial x_1} + \operatorname{sen}\theta_i \frac{\partial}{\partial x_2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial l_i^2} = \frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{2}\cos 2\theta_i \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) + \operatorname{sen} 2\theta_i \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2},$$

$$\frac{\partial^3}{\partial l_i^3} = \frac{\cos 3\theta_i}{4} \left(\frac{\partial^3}{\partial x_1^3} - 3\frac{\partial^3}{\partial x_1 \partial x_2^2} \right) + \frac{\operatorname{sen} 3\theta_i}{4} \left(3\frac{\partial^3}{\partial x_1^2 \partial x_2} - \frac{\partial^3}{\partial x_2^3} \right) + \frac{3}{4}\left(\cos\theta_i \frac{\partial}{\partial x_1} + \operatorname{sen}\theta_i \frac{\partial}{\partial x_2} \right)\Delta,$$

$$\frac{\partial^4}{\partial l_i^4} = \frac{3}{8}\Delta^2 + \frac{\cos 4\theta_i}{8}\left(\Delta^2 - 8\frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} \right) + \frac{\operatorname{sen} 4\theta_i}{2}\left(\frac{\partial^4}{\partial x_1^3 \partial x_2} - \frac{\partial^4}{\partial x_1 \partial x_2^3} \right) + \frac{\cos 2\theta_i}{2}\left(\frac{\partial^4}{\partial x_1^4} - \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} \right) + \operatorname{sen} 2\theta_i \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}\Delta, \tag{14}$$

$$\frac{\partial^5}{\partial l_i^5} = \frac{5}{8}\left(\cos\theta_i \frac{\partial}{\partial x_1} + \operatorname{sen}\theta_i \frac{\partial}{\partial x_2} \right)\Delta^2 + \frac{5\cos 3\theta_i}{16}\left(\frac{\partial^5}{\partial x_1^5} - 2\frac{\partial^5}{\partial x_1^3 \partial x_2^2} - 3\frac{\partial^5}{\partial x_1 \partial x_2^4} \right) - \frac{5\operatorname{sen} 3\theta_i}{16}\left(-3\frac{\partial^5}{\partial x_1^4 \partial x_2} - 2\frac{\partial^5}{\partial x_1^2 \partial x_2^3} + \frac{\partial^5}{\partial x_2^5} \right) + \frac{\cos 5\theta_i}{16}\left(\frac{\partial^5}{\partial x_1^5} + 5\frac{\partial^5}{\partial x_1 \partial x_2^4} - 10\frac{\partial^5}{\partial x_1^3 \partial x_2^2} \right) + \frac{\operatorname{sen} 5\theta_i}{16}\left(\frac{\partial^5}{\partial x_2^5} + 5\frac{\partial^5}{\partial x_1^4 \partial x_2} - 10\frac{\partial^5}{\partial x_1^2 \partial x_2^3} \right).$$

Pongamos las correlaciones (14) en la (13) y tengamos en cuenta que

$$\sum_{i=1}^{n} \cos \alpha\theta_i = \cos \alpha \left(\theta + \frac{n+1}{n}\pi\right) \times$$

$$\times \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} \alpha\pi}{\operatorname{sen}(\alpha\pi/n)} & \text{para } \dfrac{\alpha}{n} \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \\ (-1)^{\alpha(n+1)/n} n & \text{para } \dfrac{\alpha}{n} = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \end{cases} \tag{15}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{sen} \alpha\theta_i = \operatorname{sen} \alpha \left(\theta + \frac{n-3}{n}\pi\right) \times$$

$$\times \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} \alpha\pi}{(\operatorname{sen} \alpha\pi/n)} & \text{para } \dfrac{\alpha}{n} \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \\ (-1)^{\alpha(n-1)/n} n & \text{para } \dfrac{\alpha}{n} = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots . \end{cases} \tag{16}$$

Como resultado tendremos (siendo $n \geqslant 3$)

$$\mathscr{L}u = \frac{nh}{4}\Delta u + \frac{nh^3}{64}\Delta^2 u + \delta_{n,3}\frac{h^2}{8}\left\{\cos 3\theta \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3} - 3\frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_2^2}\right) +$$
$$+ \operatorname{sen} 3\theta \left(3\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^2 \partial x_2} - \frac{\partial^3 u}{\partial x_2^3}\right)\right\} -$$
$$- \delta_{n,4}\frac{h^3}{48}\left\{\left(\Delta^2 u - 8\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}\right)\cos 4\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) +\right.$$
$$+ 16\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^3 \partial x_2} - \frac{\partial^4 u}{\partial x_1 \partial x_2^3}\right)\operatorname{sen} 4\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)\right\} +$$
$$+ (\delta_{n,5} + \delta_{n,3})\, O(h^4) + O(h^5), \tag{17}$$

donde $\delta_{n,i}$ es el símbolo de Kronecker. De (17) se deduce que el operador $\mathscr{L}$ aproximará al operador laplaciano para cualquier $n \geqslant 3$ al multiplicarlo complementariamente por la magnitud $4/(nh)$. Introduzcamos la siguiente designación:

$$\Lambda = \frac{4}{nh}\mathscr{L}. \tag{18}$$

Entonces en la red triangular ($n = 6$) la ecuación en diferencias

$$\Lambda y = -\varphi(x), \tag{19}$$

donde

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{h^2}{16}\Delta f, \tag{20}$$

según se deduce de (17), aproxima a la ecuación (1) con el error $O(h^4)$. Sobre la red hexagonal la ecuación

$$\Lambda y = -\varphi(x), \quad \varphi(x) = f(x) \tag{21}$$

(no escribimos la expresión para Λy) aproxima a la ecuación (1) con el error $O(h)$; además, ya que esta red tiene dos modelos correspondientes a $\theta = 0$ y $\theta = \pi$, entonces

$$\psi(x^{(0)}) = \frac{h}{6}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3} - 3\frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_2^2}\right) + O(h^2),$$

$$\psi(\overline{x}^{(0)}) = -\frac{h}{6}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3} - 3\frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_2^2}\right) + O(h^2).$$

3. El operador laplaciano en diferencias sobre la red no uniforme. Consideremos un ejemplo más de aproximación de la ecuación $\Delta u = -f$. Sea Ω una red no uniforme arbitraria en el plano Ox_1x_2:

$$\Omega = \{(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}) | \quad i_\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \alpha = 1, 2\}.$$

El paso de la red en la dirección x_α es igual a

$$h_\alpha^{(i_\alpha)} = x_\alpha^{(i_\alpha)} - x_\alpha^{(i_\alpha - 1)}$$

y depende sólo de i_α; el paso medio de esta red en dicha dirección es igual a

$$\hbar_\alpha = \hbar_\alpha^{(i_\alpha)} = \frac{1}{2}(h_\alpha + h_\alpha^+), \quad \text{donde} \quad h_\alpha = h_\alpha^{(i_\alpha)}, \ h_\alpha^+ = h_\alpha^{(i_\alpha+1)}.$$

Aproximemos las derivadas de la ecuación (1) por las correlaciones tipo (3) del § 1 del capítulo II:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} \sim \frac{1}{\hbar_\alpha}\left(\frac{u^{(+1_\alpha)} - u}{h_\alpha^+} - \frac{u - u^{(-1_\alpha)}}{h_\alpha}\right) = u_{\bar{x}_\alpha \hat{x}_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2,$$

donde

$$u^{(\pm 1_1)} = u(x_1^{(i_1 \pm 1)}, x_2^{(i_2)}), \quad u^{(\pm 1_2)} = u(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2 \pm 1)}).$$

La ecuación en diferencias que aproxima en la red no uniforme Ω la ecuación de Poisson $\Delta u = -f$ se escribe del modo siguiente:

$$\Lambda y = y_{\bar{x}_1 \hat{x}_1} + y_{\bar{x}_2 \hat{x}_2} = -f(x), \qquad x \in \Omega. \tag{22}$$

El error de aproximación

$$\psi = \Lambda u + f = u_{\bar{x}_1 \hat{x}_1} + u_{\bar{x}_2 \hat{x}_2} + f(x),$$

donde u es la solución de la ecuación $\Delta u + f = 0$, se puede representar en la forma

$$\psi = (\Delta u + f) + \frac{1}{6}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(h_\alpha^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x_\alpha^3}\right)_{\hat{x}_\alpha} + O(\hbar_1^2 + \hbar_2^2) =$$

$$= \frac{1}{6}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(h_\alpha^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x_\alpha^3}\right)_{\hat{x}_\alpha} + O(\hbar_1^2 + \hbar_2^2).$$

Realmente, descomponiendo $u^{(\pm 1_\alpha)}$ por las potencias de h_α y $\hbar_\alpha^+$ en el entorno del nodo $x=(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)})$, tendremos

$$u_{x_\alpha}=\frac{u^{(+1_\alpha)}-u}{h_\alpha^+}=\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}+\frac{h_\alpha^+}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}+\frac{(h_\alpha^+)^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x_\alpha^3}+O((h_\alpha^+)^3).$$

$$u_{\bar{x}_\alpha}=\frac{u-u^{(-1_\alpha)}}{h_\alpha}=\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}-\frac{h_\alpha}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}+\frac{h_\alpha^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x_\alpha^3}+O(h_\alpha^3),$$

y, por consiguiente,

$$u_{\bar{x}_\alpha\hat{x}_\alpha}=\frac{1}{\hbar_\alpha}(u_{x_\alpha}-u_{\bar{x}_\alpha})=\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}+\frac{1}{6\hbar_\alpha}((h_\alpha^+)^2-h_\alpha^2)\frac{\partial^3 u}{\partial x_\alpha^3}+O(\hbar_\alpha^2).$$

Poniendo aquí la expresión

$$(h_\alpha^+)^2\frac{\partial^3 u}{\partial x_\alpha^3}=(h_\alpha^+)^2\left[\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_\alpha^3}\right)^{(+1_\alpha)}+O(h_\alpha^+)\right],$$

obtenemos

$$u_{\bar{x}_\alpha\hat{x}_\alpha}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}+\frac{1}{6}\left(h_\alpha^2\frac{\partial^3 u}{\partial x_\alpha^3}\right)_{\hat{x}_\alpha}+O(\hbar_\alpha^2).$$

4. Aproximación de la ecuación de Poisson en coordenadas polares. Si para la ecuación de Poisson (1) se plantea el problema de hallar su solución en un círculo, en un anillo, en un sector anular o circular, es racional aproximar la ecuación (1) sobre la red en coordenadas polares. La ecuación de Poisson en coordenadas polares (r, φ) tiene la forma

$$\Delta_{r,\varphi}u=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=-f(r, \varphi), \tag{23}$$

donde $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$, $\operatorname{tg}\varphi=x_2/x_1$ y el plano Ox_1x_2 se proyecta sobre la semifranja $\{0\leqslant r<\infty,\ 0\leqslant\varphi<2\pi\}$.

Los coeficientes de la ecuación (23), cuando $r=0$, tienen una singularidad, y por esta razón para escoger la solución que nos interesa tenemos que estipular aquí unas condiciones complementarias. Se suele interesar por las soluciones acotadas para $r=0$, pero las soluciones semejantes satisfacen la condición

$$\lim_{r\to 0} r\frac{\partial u}{\partial r}=0. \tag{24}$$

Pues, además de la condición (23), tenemos que aproximar asimismo la condición (24). Es más cómodo tener en cuenta la condición (24) mediante una elección especial de la red. Precisamente así procederemos. Introduzcamos respecto a la variable φ una red uniforme con el paso h_φ

$$\omega_\varphi=\{\varphi_m=mh_\varphi,\ m=0, 1, \ldots, M-1,\ h_\varphi=2\pi/M\},$$

y respecto a la variable r, una red uniforme desplazada en medio paso, siendo su paso h_r

$$\omega_r = \{r_n = (n + 0{,}5)\, h_r,\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ h_r > 0\}.$$

La red en la semifranja tendrá la forma

$$\Omega = \omega_r \times \omega_\varphi = \{(r_n,\ \varphi_m) \mid r_n \in \omega_r,\ \varphi_m \in \omega_\varphi\}.$$

Eliminando los puntos con la coordenada $r = 0$ del número de los puntos de la red, nos libramos de la necesidad de aproximar la ecuación para el caso de que $r = 0$, pero surge el problema de aproximar la ecuación (23) para $r = h_r/2$. Si se hubiera introducido respecto a r una red uniforme no desplazada y los puntos con la coordenada $r = 0$ hubieran entrado en el número de los nodos, entonces para escribir la ecuación para $r = 0$ nos habríamos visto obligados a utilizar la forma cartesiana de la ecuación (1) y emplear el operador (18), (12) con $h = h_r$ y $n = M$. Esto quiere decir que la ecuación en diferencias para $r = 0$ habría contenido $M + 1$ incógnitas, lo que no sería muy cómodo al realizar el esquema.

La aproximación de la ecuación (23) sobre la red Ω, cuando $r \neq 0{,}5h_r$ no provoca dificultades; a saber, el operador L_φ se aproxima del modo obvio

$$L_\varphi v = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} \sim \Lambda_\varphi v = \frac{1}{r^2} v_{\bar{\varphi}\varphi}, \tag{25}$$

y el operador L_r se aproxima como operador con coeficientes variables (véase el § 3 del capítulo II)

$$L_r v = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) \sim \Lambda_r v = \frac{1}{r}(\rho v_{\bar{r}})_r,$$

donde $\rho(r) = r - h_r/2$. Por lo tanto la aproximación de la ecuación (23) con $r \neq h_r/2$ se puede aceptar en la forma siguiente:

$$\Lambda y = \frac{1}{r}(\rho y_{\bar{r}})_r + \frac{1}{r^2} y_{\bar{\varphi}\varphi} = -f(r,\ \varphi), \quad r \neq \frac{h_r}{2}, \tag{26}$$

$\Lambda = \Lambda_r + \Lambda_\varphi$.

Para deducir las ecuaciones en diferencias, cuando $r = h_r/2$ valgámonos del método de equilibrio. Multipliquemos la ecuación (23) por r e integrémosla respecto a r entre ε y h_r y respecto a φ entre $\varphi_m - h_\varphi/2$ y $\varphi_m + h_\varphi/2$. Tomando en consideración la condición (24), hallamos el límite de la correlación obtenida cuando $\varepsilon \to 0$. Nos resulta

$$h_r \int\limits_{\varphi_m - h_\varphi/2}^{\varphi_m + h_\varphi/2} \frac{\partial u}{\partial r}(h_r,\ \varphi)\, d\varphi + \int\limits_0^{h_r} \frac{1}{r}\left[\frac{\partial u}{\partial \varphi}\left(r,\ \varphi_m + \frac{h_\varphi}{2}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial u}{\partial \varphi}\left(r,\ \varphi_m - \frac{h_\varphi}{2}\right)\right] dr + \int\limits_0^{h_r} r\, dr \int\limits_{\varphi_m - h_\varphi/2}^{\varphi_m + h_\varphi/2} f(r,\ \varphi)\, d\varphi = 0. \tag{27}$$

Aproximando ahora cada una de las integrales de (27) mediante la fórmula de cuadratura de los rectángulos centrales, hallamos que

$$h_r h_\varphi \frac{\partial u}{\partial r}(h_r, \varphi_m) + 2\left[\frac{\partial u}{\partial \varphi}\left(\frac{h_r}{2}, \varphi_m + \frac{h_\varphi}{2}\right) - \frac{\partial u}{\partial \varphi}\left(\frac{h_r}{2}, \varphi_m - \frac{h_\varphi}{2}\right)\right] + \\ + \frac{h_r^2 h_\varphi}{2} f\left(\frac{h_r}{2}, \varphi_m\right) \approx 0.$$

Para obtener la ecuación en diferencias en el nodo $(0{,}5h_r, \varphi_m)$ sustituyamos las derivadas de esta correlación por las correspondientes relaciones en diferencias

$$h_r h_\varphi y_r(r_0, \varphi_m) + 2h_\varphi y_{\bar{\varphi}\varphi}(r_0, \varphi_m) + \frac{h_r^2 h_\varphi}{2} f(r_0, \varphi_m) = 0,$$

donde

$$y_r(r_0, \varphi_m) = \frac{1}{h_r}[y(r_0 + h_r, \varphi_m) - y(r_0, \varphi_m)].$$

Después de dividir en $0{,}5h_r^2 h_\varphi$, de aquí se deduce que

$$\frac{2}{h_r} y_r(r_0, \varphi_m) + \frac{4}{h_r^2} y_{\bar{\varphi}\varphi}(r_0, \varphi_m) = -f(r_0, \varphi_m), \quad \text{cuando} \quad r = h_r/2.$$

Haciendo aquí $h_r = 2r_0$ y teniendo en cuenta que $\rho^{(+1_r)}(r_0) = r_1 - h_r/2 = h_r$, obtendremos como resultado la ecuación

$$\frac{1}{rh_r}\rho^{(+1_r)} y_r + \frac{1}{r^2} y_{\bar{\varphi}\varphi} = -f(r, \varphi), \quad \text{siendo} \quad r = r_0 = h_r/2. \tag{28}$$

La aproximación de la ecuación (23) en todos los nodos de la red Ω se ha construido. Se debe señalar que de hecho la ecuación (28) se sigue de la (26), si en la última se hace $r = h_r/2$.

Realmente, ya que

$$\Lambda_r y = \frac{1}{r}(\rho y_{\bar{r}})_r = \frac{1}{rh_r}(\rho^{(+1_r)} y_r - \rho y_{\bar{r}})|_{r=h_r/2},$$

y $\rho(h_r/2) = 0$, en tal caso en todos los nodos (r_n, φ_m) de la red Ω, siendo $n \geqslant 0$ y $0 \leqslant m \leqslant M-1$, la ecuación (26) se puede considerar preestablecida. Introduzcamos la siguiente denotación:

$$\overline{\Lambda}_r v = \begin{cases} \frac{1}{r}(\rho v_{\bar{r}})_r & \text{para} \quad r \neq h_r/2, \\ \frac{1}{rh_r}\rho^{(+1_r)} v_r & \text{para} \quad r = h_r/2 \quad (n = 0). \end{cases} \tag{29}$$

Entonces la aproximación de la ecuación (23) sobre toda la red Ω, atendiendo las fórmulas (26), (28) y (29), tomará la forma

$$\overline{\Lambda} y = \overline{\Lambda}_r y + \Lambda_\varphi y = -f(r, \varphi), \quad (r, \varphi) \in \Omega. \tag{30}$$

Calculemos el error de aproximación de la ecuación en diferencias (30). Está claro que

$$\Lambda_\varphi u \equiv \frac{1}{r^2} u_{\bar\varphi\varphi} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\bigg|_{\varphi=\varphi_m} + \frac{h_\varphi^2}{12r^2}\widetilde{\frac{\partial^4 u}{\partial\varphi^4}},$$

donde

$$\widetilde{\frac{\partial^4 u}{\partial\varphi^4}} = \frac{\partial^4}{\partial\varphi^4}u(\tilde\varphi,\ r),\quad \tilde\varphi\in[\varphi_{m-1},\ \tilde\varphi_{m+1}].$$

Calculemos con más detalle el error de aproximación del operador Λ_r. Desarrollando $u^{(\pm 1_r)}$ por las potencias de h_r, obtenemos que

$$u(r_n+h_r,\ \varphi_m) = u(r_{n+1},\ \varphi_m) =$$
$$= \left(u + h_r\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{h_r^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{h_r^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial r^3}\right)_{r=r} + \frac{h_r^4}{24}\overline{\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}},$$

$$u(r_n-h_r,\ \varphi_m) = u(r_{n-1},\ \varphi_m) =$$
$$= \left(u - h_r\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{h_r^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{h_r^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial r^3}\right)_{r=r_n} + \frac{h_r^4}{24}\overline{\overline{\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}}},$$

donde

$$\overline{\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}} = \frac{\partial^4 u}{\partial r^4}(\bar r_n,\ \varphi_m),\quad \bar r_n\in[r_n,\ r_{n+1}],$$

$$\overline{\overline{\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}}} = \frac{\partial^4 u}{\partial r^4}(\bar{\bar r}_n,\ \varphi_m),\quad \bar{\bar r}_n\in[r_{n-1},\ r_n].$$

De aquí se desprende que

$$u_r = \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2}h_r\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{6}h_r^2\frac{\partial^3 u}{\partial r^3}\right)_{r=r_n} + \frac{h_r^3}{24}\overline{\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}},$$

$$u_{\bar r} = \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{2}h_r\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{6}h_r^2\frac{\partial^3 u}{\partial r^3}\right) - \frac{h_r^3}{24}\overline{\overline{\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}}}.$$

Luego, tomando en consideración que $\rho(r_n) = r_n - 0{,}5\,h_r$, $\rho^{(+1_r)} = \rho(r_{n+1}) = r_n + 0{,}5\,h_r$, hallamos

$$\Lambda_r u = \frac{1}{r}(\rho u_{\bar r})_r = \frac{1}{rh_r}(\rho^{(+1_r)}u_r - \rho u_{\bar r}) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) +$$
$$+ \frac{h_r^2}{6r}\left[\frac{\partial^3 u}{\partial r^3} + \frac{1}{4}(r+0{,}5\,h_r)\overline{\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}} + \frac{1}{4}(r-0{,}5\,h_r)\overline{\overline{\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}}}\right],$$

así que

$$\psi(r_n,\ \varphi_m) = (\Delta_{r,\varphi}u + f)_{r=r_n,\varphi=\varphi_m} +$$
$$\frac{h_r^2}{6r}\left[\frac{\partial^3 u}{\partial r^3} + \frac{r+0{,}5\,h_r}{4}\overline{\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}} + \frac{r-0{,}5\,h_r}{4}\overline{\overline{\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}}}\right]_{r=r_n} + \frac{h_\varphi^2}{12r^2}\widetilde{\frac{\partial^4 u}{\partial\varphi^4}}. \qquad (31)$$

Cuando $r = r_0 = 0,5\,h_r$, tenemos

$$\Lambda_r u = \frac{1}{rh_r}\,\rho^{(+1_r)}\,u_r = \frac{h_r}{rh_r}\,u_r, \quad \text{puesto que } \rho^{(+1_r)} = h_r.$$

Sustituyendo aquí

$$u_r\,|_{r=0,5h_r} = \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{h_r}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{h_r^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial r^3}\right)_{r=0,5h_r} + \frac{h_r^3}{24}\overline{\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}} =$$
$$= \left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{h_r^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial r^3}\right)_{r=0,5h_r} + \frac{h_r^3}{24}\overline{\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}},$$

obtenemos:

$$\Lambda_r u = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{h_r^2}{6r}\frac{\partial^3 u}{\partial r^3}\right)_{r=0,5h_r} + \frac{h_r^3}{24r}\overline{\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}}.$$

Es de señalar que, al escribir el desarrollo (31), no empleábamos la condición (24) en ninguna parte, así que el (31) queda válido en aquel caso cuando la condición (24) no se cumple. Más aún, si la ecuación (30) se considera como datos y si se prescinde del modo de construcción de la ecuación cuando $r = 0,5h_r$, la condición (24) de nuevo no se utiliza explícitamente. Por eso se puede formar una impresión de que (30) aproxima la ecuación (23) sin la suposición (24). Pero, sin duda, no es así. Si se renuncia a la condición (24), la solución de la ecuación (23), siendo $r = 0$, tendrá una singularidad, en el mejor de los casos, tipo de $\ln(1/r)$. Sustituyendo esta solución en el (31), hallamos que para $r = O(h_r)$

$$\psi(r,\ \varphi) = 0\,(1/h_r^2),$$

es decir, en realidad la aproximación no tiene lugar. Si se supone la verificación de la condición (24), ésta garantiza no sólo la acotación de la solución para $r = 0$, sino también su lisura suficiente (siendo adecuada la lisura del miembro segundo $f(r,\ \varphi)$).

Investigamos el error de aproximación del (31) con la suposición de que la solución de la ecuación (1) tiene cuartas derivadas acotadas respecto a las variables cartesianas x_1 y x_2. Esto es posible únicamente al cumplir la condición de acotación (24). Cerciorémonos de que las derivadas respecto a r y φ son combinaciones lineales con coeficientes acotados de las derivadas respecto a x_1 y x_2. Para ello expresemos las derivadas respecto a r y φ mediante las derivadas respecto a x_1 y x_2. Considerando que $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\,\mathrm{sen}\,\varphi$, $\frac{\partial x_1}{\partial r} = \cos\varphi$, $\frac{\partial x_2}{\partial r} = \mathrm{sen}\,\varphi$, además,

$$\frac{\partial x_1}{\partial \varphi} = -r\,\mathrm{sen}\,\varphi = -x_2, \quad \frac{\partial x_2}{\partial \varphi} = r\cos\varphi = x_1,$$

hallamos

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial u}{\partial x_2}\operatorname{sen}\varphi,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\cos^2\varphi+\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\,\partial x_2}\operatorname{sen}2\varphi+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\operatorname{sen}^2\varphi.$$

Aquí se ve que las derivadas $\partial^3 u/\partial r^3$ y $\partial^4 u/\partial r^4$ se expresan linealmente a través de las derivadas con respecto a x_1 y x_2 del mismo orden con los coeficientes acotados. Por eso estas derivadas son acotadas:

$$\left|\frac{\partial^3 u}{\partial r^3}\right|\leqslant M,\quad \left|\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}\right|\leqslant M,\quad M=\text{const}>0. \tag{32}$$

De modo análogo hallamos

$$\frac{\partial u}{\partial\varphi}=-x_2\frac{\partial u}{\partial x_1}+x_1\frac{\partial u}{\partial x_2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=x_2^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+x_1^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}-2x_1x_2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\,\partial x_2}-x_1\frac{\partial u}{\partial x_1}-x_2\frac{\partial u}{\partial x_2},\ \text{etc.}$$

Es evidente que $\partial^k u/\partial\varphi^k$, $k\geqslant 1$, es un polinomio de potencia k respecto a las variables x_1 y x_2, con esto los coeficientes de los términos de potencia $n\leqslant k$ son derivadas respecto a x_1, x_2 o respecto a x_1 y x_2 del mismo orden n, mientras que falta el término de potencia cero. De lo expuesto se desprende que

$$\left|\frac{\partial^3 u}{\partial\varphi^3}\right|\leqslant rM,\quad \left|\frac{\partial^4 u}{\partial\varphi^4}\right|\leqslant rM, \tag{33}$$

donde M son ciertas constantes positivas. Poniendo en el (31) las acotaciones (32) y (33), obtenemos

$$\psi(r,\ \varphi)=0\left(\frac{h_r^2+h_\varphi^2}{r}\right). \tag{34}$$

De esta forma, la ecuación en diferencias (30) aproxima la ecuación diferencial (23) sólo al cumplirse la condición (24).

5. Aproximación de la ecuación de Poisson en coordenadas cilíndricas. Si para la ecuación de Poisson se plantea el problema de hallar la solución en un cilíndro circular finito o en un tubo, naturalmente la ecuación se aproxima sobre la red en coordenadas cilíndricas. La ecuación de Poisson escrita en coordenadas cilíndricas tiene la forma

$$\Delta_{r\varphi z}u=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-f(r,\ \varphi,\ z), \tag{35}$$

donde $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$, $\operatorname{tg}\varphi=x_2/x_1$, $z=x_3$, o

$$\Delta_{r\varphi}u+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-f(r,\ \varphi,\ z).$$

La ecuación de Poisson en coordenadas cilíndricas (35) difiere de esta ecuación en coordenadas polares sólo con el sumando complementa-

rio $\partial^2u/\partial z^2$. Con respecto a las variables r y φ se pueden utilizar de nuevo las redes ya aceptadas ω_r y ω_φ, pero respecto a la variable z tomemos la red uniforme con el paso h_z $\omega_z = \{z_k = kh_z \mid k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, h_z > 0\}$. La red Ω, en la cual se va a aproximar la ecuación (35), tendrá la forma

$$\Omega = \omega_r \times \omega_\varphi \times \omega_z = \{(r_n, \varphi_m, z_k) \mid \varphi_m \in \omega_\varphi, r_n \in \omega_r, z_k \in \omega_z\}.$$

Escribamos el operador de Laplace $\Delta_{r\varphi z}$ u en forma de suma

$$\Delta_{r\varphi z} u = L_r u + L_\varphi u + L_z u,$$

$$L_r u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right), \quad L_\varphi u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}, \quad L_z u = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Sobre la red Ω los operadores L_r y L_φ se pueden aproximar al igual que en el sistema de coordenadas polares (véanse (29) y (25)), a la vez el operador L_z se aproxima por el operador de diferencias elemental

$$\Lambda_z v = v_{\bar{z}z} \sim L_z v = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}.$$

La aproximación en diferencias de la ecuación (35) se puede escribir en la forma

$$\overline{\Lambda} y = \overline{\Lambda}_r y + \Lambda_\varphi y + \Lambda_z y = -f(r, \varphi, z), \quad (r, \varphi, z) \in \Omega, \qquad (36)$$

donde $\overline{\Lambda}_r$ y Λ_φ se determinan mediante las fórmulas (29) y (25).

El error de aproximación del esquema (36) es igual a

$$\psi = \overline{\Lambda} u + f = \psi_{r,\varphi} + \Lambda_z u,$$

donde $\psi_{r,\varphi} = \overline{\Lambda}_r u + \Lambda_\varphi u + f$ se presenta en la forma de (31) a la vez que $\Lambda_z u = L_z u + O(h_z^2)$.

Las acotaciones de las derivadas respecto a r y φ, obtenidas en el punto anterior, son válidas también para el caso dado. Por eso para el error de aproximación tiene lugar la acotación

$$\psi = O\left(\frac{h_\varphi^2 + h_r^2}{r} + h_z^2\right). \qquad (37)$$

6. Aproximación de la ecuación de Poisson en coordenadas esféricas. Si para la ecuación de Poisson se plantea un problema de hallar la solución en una esfera, en un anillo esférico, en un sector esférico o en otro recinto que, al pasar a los coordenadas esféricas, se aplica sobre el paralelepípedo, es natural aproximar la ecuación en las coordenadas esféricas. La ecuación de Poisson escrita en coordenadas esféricas tiene la forma

$$\Delta_{r,\varphi,\theta} u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) =$$
$$= -f(r, \varphi, \theta), \qquad (38)$$

donde

$$r=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2},\quad \theta=\arccos\frac{x_3}{r},\quad \operatorname{tg}\varphi=\frac{x_2}{x_1},$$

en tanto que el espacio $Ox_1x_2x_3$, al pasar a las coordenadas esféricas, se aplicará sobre el paralelepípedo semiinfinito

$$\{0\leqslant r<\infty,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi\}.$$

Para lo sucesivo aceptemos las designaciones

$$L_r u=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right),\qquad L_\varphi u=\frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2},$$

$$L_\theta u=\frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right),\quad \Delta_{r,\varphi,\theta}=L_r+L_\varphi+L_\theta$$

y volvamos a escribir la (38) en la forma

$$L_r u+L_\varphi u+L_\theta u=-f(r,\ \varphi,\ \theta). \tag{38'}$$

En calidad de red respecto a la variable φ se puede utilizar de nuevo la red ω_φ introducida anteriormente. Respecto a la variable r esta vez es racional usar una red uniforme con el paso h_r desplazada en un paso a la derecha:

$$\omega_r=\{r_n=(n+1)\,h_r,\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ h_r>0\}.$$

Respecto a la variable θ conviene tomar una red uniforme desplazada medio paso a la derecha desde el extremo izquierdo del segmento $[0,\ \pi]$ y medio paso a la izquierda desde el extremo derecho de este segmento:

$$\omega_\theta=\{\theta_i=(i+0{,}5)\,h_\theta,\ i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ I-1,\ h_\theta=\pi/I\}.$$

Como resultado obtendremos la red en el paralelepípedo

$$\Omega=\omega_r\times\omega_\varphi+\omega_\theta=\{(r_n,\ \varphi_m,\ \theta_i),\ r_n\in\omega_r,\ \varphi_m\in\omega_\varphi,\ \theta_i\in\omega_\theta\}.$$

El operador L_φ se aproxima del modo evidente (en el nodo $(r_n,\ \varphi_m,\ \theta_i)$)

$$\Lambda_\varphi u=\frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\,v_{\bar\varphi\varphi}\sim L_\varphi v=\frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}. \tag{39}$$

El operador L_r, el que tiene los coeficientes variables, se puede aproximar según el método de equilibrio (véase el § 3 del capítulo II) empleando la correlación (6) del § 3 del capítulo II. Atendiéndolo hallamos que

$$\Lambda_r v=\frac{1}{r^2}(\rho v_{\bar r})_r\sim L_r v=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v}{\partial r}\right), \tag{40}$$

donde $\rho = \rho(r) = rr^{(-1_r)} = r(r - h_r)$, $r \geqslant h_r$. La expresión (40), siendo $r = h_r$, toma la forma

$$\Lambda_r v = \frac{1}{r^2 h_r} \rho^{(+1_r)} v_r, \qquad \rho^{(+1_r)} = r(r + h_r) = 2h_r^2, \tag{40'}$$

puesto que $\rho(h_r) = 0$. Consideraremos formalmente esta expresión como aproximación del operador $L_r v$, siendo $r = h_r$.

El operador $L_\theta v$ es asimismo un operador de coeficientes variables, y la aplicación del método de equilibrio, siendo $\theta \neq 0{,}5h_\theta$ y $\theta \neq \pi - 0{,}5h_\theta$ con el empleo de la correlación (9) del § 3 del capítulo II conduce al operador Λ_θ, el cual aproxima al operador L_θ:

$$\Lambda_\theta v = \frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \theta} \left(\operatorname{sen} \bar{\theta} y_{\bar{\theta}}\right)_\theta \sim L_\theta v = \frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\operatorname{sen} \theta \frac{\partial v}{\partial \theta}\right), \tag{41}$$

donde $\bar{\theta} = \bar{\theta}_i = \theta_i - 0{,}5h_\theta = ih_\theta$.

Teniendo en cuenta que

$$\bar{\theta} = 0, \quad \text{siendo} \quad \theta = 0{,}5h_\theta \quad (i = 0), \quad \bar{\theta}^{(+1)} = (\theta - 0{,}5h_\theta) + h_\theta = \pi,$$

cuando $\theta = \pi - 0{,}5h_\theta$, escribamos las expresiones indicadas más arriba para Λ_θ, siendo $\theta = 0{,}5h_\theta$ y $\theta = \pi - 0{,}5h_\theta$:

$$\Lambda_\theta v = \frac{\operatorname{sen} \bar{\theta}^{(+1)}}{h_\theta r^2 \operatorname{sen} \theta} y_\theta \quad \text{para} \quad \theta = 0{,}5h_\theta, \quad (\bar{\theta}^{(+1)} = h_\theta),$$

$$\Lambda_\theta v = -\frac{\operatorname{sen} \bar{\theta}}{h_\theta r^2 \operatorname{sen} \theta} y_{\bar{\theta}} \quad \text{para} \quad \theta = \pi - 0{,}5h_\theta, \quad (\bar{\theta} = \pi - h_\theta).$$

Tomamos estas expresiones como aproximación en diferencias del operador L_θ, siendo $\theta = 0{,}5h_\theta$ y $\theta = \pi - 0{,}5h_\theta$, es decir, utilizaremos la fórmula (41) para todos los nodos de la red $\omega_{\tilde{\theta}}$ (y Ω).

De esta suerte, hemos obtenido la siguiente aproximación en diferencias de la ecuación (38) sobre la red Ω

$$\Lambda y = \Lambda_r y + \Lambda_\varphi y + \Lambda_{\tilde{\theta}} y = -f(r, \varphi, \theta), \quad (r, \varphi, \theta) \in \Omega, \tag{42}$$

donde los operadores Λ_r, Λ_φ, Λ_z se determinan a base de las fórmulas (40) (40'), (39) y (4).

Vamos a calcular el error de aproximación para el esquema en diferencias (42):

$$\psi = \Lambda u + f = \Lambda_r u + \Lambda_\varphi u + \Lambda_\theta u + f(r, \varphi, \theta), \tag{43}$$

donde u es la solución de la ecuación diferencial (38). Hagamos el desarrollo de la expresión $\Delta_r u$ según las potencias de h_r, después el de $\Delta_\varphi u$ según las potencias de h_φ y el de $\Delta_\theta u$ según las potencias de h_θ.

Tomando en consideración que

$$\begin{aligned} u_r &= \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{h_r}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{h_r^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial r^3} \right)_{r=r_n} + \frac{h_r^3}{24} \overline{\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}}, \\ u_{\bar{r}} &= \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{h_r}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{h_r^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial r^3} \right)_{r=r_n} - \frac{h_r^3}{24} \overline{\overline{\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}}} \end{aligned} \qquad (44)$$

donde

$$\overline{\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}} = \frac{\partial^4 u}{\partial r^4}\Big|_{r=\bar{r}_n}, \qquad \bar{r}_n \in [r_n, r_{n+1}],$$

$$\overline{\overline{\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}}} = \frac{\partial^4 u}{\partial r^4}\Big|_{r=\bar{\bar{r}}_n}, \qquad \bar{\bar{r}}_n \in [r_{n-1}\ r_n],$$

además, $\rho = r(r-h_r)$, $\rho^{(+1_r)} = (r+h_r)\,r$, obtenemos

$$\Lambda_r u = \frac{1}{r^2} (\rho u_{\bar{r}})_r = \frac{1}{h_r r^2} (\rho^{(+1_r)} u_r - \rho u_{\bar{r}}) =$$

$$= L_r u + \frac{h_r^2}{3r} \frac{\partial^3 u}{\partial r^3} + \frac{h_r^2}{24} \left\{ \left(1 + \frac{h_r}{r}\right) \overline{\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}} + \left(1 - \frac{h_r}{r}\right) \overline{\overline{\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}}} \right\}. \qquad (45)$$

Para $\Lambda_\varphi u$ es obvia la siguiente presentación:

$$\Lambda_\varphi u = L_\varphi u + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \frac{h_\varphi^2}{12} \widetilde{\frac{\partial^4 u}{\partial \varphi^4}}, \qquad (46)$$

donde $\widetilde{\frac{\partial^4 u}{\partial \varphi^4}} = \frac{\partial^4 u}{\partial \varphi^4}\Big|_{\varphi=\tilde{\varphi}_m}$ $\tilde{\varphi}_m \in [\varphi_{m-1}, \varphi_{m+1}]$.

Ahora analicemos la expresión

$$\Lambda_\theta u = \frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \theta} (\operatorname{sen} \bar{\theta} u_{\bar{\theta}})_\theta = \frac{1}{h_\theta r^2 \operatorname{sen} \theta} [\operatorname{sen} \bar{\theta}^{(+1)} u_\theta - \operatorname{sen} \bar{\theta} u_{\bar{\theta}}].$$

Sustituyendo aquí las expresiones de u_θ y $u_{\bar{\theta}}$ obtenidas a base de las fórmulas tipo de (44), después de las transformaciones obvias hallamos

$$\begin{aligned} \Lambda_\theta u = L_\theta u + \Big\{ &-\frac{\cos \theta}{r^2 \operatorname{sen} \theta} \left(1 - \frac{2 \operatorname{sen}(h_\theta/2)}{h_\theta}\right) \frac{du}{\partial \theta} - \\ &- \frac{2 \operatorname{sen}^2 (h_\theta/4)}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{h_\theta^2}{3} \frac{\operatorname{sen} h_\theta/2}{h_\theta} \frac{\cos \theta}{r^2 \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial^3 u}{\partial \theta^3} + \\ &+ \frac{h_\theta^2}{24 r^2 \operatorname{sen} \theta} \left[\operatorname{sen}(\theta + 0{,}5 h_\theta) \overline{\frac{\partial^4 u}{\partial \theta^4}} + \operatorname{sen}(\theta - 0{,}5 h_\theta) \overline{\overline{\frac{\partial^4 u}{\partial \theta^4}}} \right] \Big\}. \end{aligned} \qquad (47)$$

Al realizar la sustitución de (45)—(47) en la (43), obtenemos el desarrollo del error de aproximación ψ según las potencias de h_r, h_φ y h_θ. Para la acotación del orden de ψ con relación a h_r, h_φ y h_θ

es necesario acotar las derivadas respecto a r, φ y θ, las cuales se contienen en la expresión para ψ.

Supongamos que la solución de la ecuación (1) (ó (38)) tiene cuartas derivadas acotadas respecto a las variables cartesianas x_1, x_2 y x_3. Teniendo en cuenta que $x_1 = r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi$, $x_2 = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi$ y $x_3 = r \cos \theta$, hallaremos las derivadas

$$\frac{\partial x_1}{\partial r} = \operatorname{sen} \theta \cos \varphi, \quad \frac{\partial x_2}{\partial r} = \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi, \quad \frac{\partial x_3}{\partial r} = \cos \theta, \quad \frac{\partial^k x_i}{\partial r^k} = 0,$$
$$k > 1, \quad i = 1, 2, 3.$$

Las derivadas $\partial^k u/\partial r^k$, $k = 1, 2, 3, 4$, se presentan en la forma de las combinaciones lineales de las derivadas de u respecto a x_1, x_2 y x_3 del orden $j \leqslant k$ con los coeficientes dependientes de $\partial x_i/\partial r$, $i = 1, 2, 3$, y por lo tanto son acotadas:

$$\left| \frac{\partial^3 u}{\partial r^k} \right| \leqslant M, \quad \left| \frac{\partial^4 u}{\partial r^4} \right| \leqslant M',$$

donde M y M' son constantes positivas.

Luego tenemos

$$\frac{\partial x_1}{\partial \varphi} = -r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi = -x_2, \quad \frac{\partial x_2}{\partial \varphi} = r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi = x_1,$$
$$\frac{\partial x_3}{\partial \varphi} = 0, \frac{\partial^2 x_1}{\partial \varphi^2} = -x_1, \quad \frac{\partial^3 x_1}{\partial \varphi^3} = x_2, \quad \frac{\partial^4 x_1}{\partial \varphi^4} = x_1,$$
$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial \varphi^2} = -x_2, \quad \frac{\partial^3 x_2}{\partial \varphi^3} = -x_1, \quad \frac{\partial^4 x_2}{\partial \varphi^4} = x_2.$$

Calculando consecuentemente las derivadas

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \varphi},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \sum_{i, j=1}^{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial x_i}{\partial \varphi} \frac{\partial x_j}{\partial \varphi} + \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial^2 x_i}{\partial \varphi^2}, \text{ etc.},$$

vemos que

$$\frac{\partial^4 u}{\partial \varphi^4} = \sum_{j=1}^{4} P_j(x_1, x_2; u),$$

donde $P_j(x_1, x_2; u)$ es un polinomio homogéneo de las variables x_1, x_2 de la potencia $j \geqslant 1$ con los coeficientes proporcionales a las j-ésimas derivadas de la función u respecto a las variables x_1 y x_2. Por esta razón la derivada $\partial^4 u/\partial \varphi^4$ es proporcional a $r \operatorname{sen} \theta$. En virtud de la acotación de las derivadas $\partial^k u/\partial x_i^s \, \partial x_{i'}^{k-s}$, $s \leqslant k$, i,

$i' = 1, 2, 3$, $k = 1, 2, 3, 4$, tendremos

$$\left| \frac{\partial^k u}{\partial \varphi^4} \right| \leqslant Mr \operatorname{sen} \theta, \qquad M = \text{const} > 0.$$

Pasamos a la acotación de las deivadas $\partial^k u / \partial \theta^k$, $k = 1, 2, 3, 4$:

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \theta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \sum_{i, j=1}^{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial x_i}{\partial \theta} \frac{\partial x_j}{\partial \theta} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial^2 x_i}{\partial \theta^2}, \text{ etc.}$$

Puesto que

$$\frac{\partial x_1}{\partial \theta} = r \cos \theta \cos \varphi, \quad \frac{\partial x_2}{\partial \theta} = r \cos \theta \operatorname{sen} \varphi,$$

$$\frac{\partial x_3}{\partial \theta} = -r \operatorname{sen} \theta, \quad \frac{\partial^2 x_1}{\partial \theta^2} = -r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi = -x_1,$$

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial \theta^2} = -x_2, \quad \frac{\partial^2 x_3}{\partial \theta^2} = -x_3, \quad \frac{\partial^3 x_1}{\partial \theta^3} = \frac{\partial x_1}{\partial \theta},$$

etc., entonces tiene lugar la representación

$$\frac{\partial^k u}{\partial \theta^k} = \sum_{j=1}^{k} P_j(r;\ \varphi,\ \theta;\ u), \qquad k = 1, 2, 3, 4,$$

donde $P_j(r;\ \varphi,\ \theta;\ u)$ es un polinomio homogéneo de la potencia j de la variable r con los coeficientes acotados dependientes de las φ, θ y j-ésimas derivadas de la función u respecto a las variables x_1, x_2 y x_3. De este modo, las derivadas $\partial^k u / \partial r^k$, siendo cualquier $k \geqslant 1$, son proporcionales a r y

$$\left| \frac{\partial^k u}{\partial \theta^k} \right| \leqslant Mr, \quad M = \text{const} > 0, \qquad k = 1, 2, 3, 4.$$

Obtenemos como resultado la siguiente acotación del error de aproximación (43):

$$\psi = O\left(\frac{h_r^2}{r} + \frac{h_\theta^2 + h_\varphi^2}{r \operatorname{sen} \theta} \right) \quad \text{ó} \quad |\psi| \leqslant M \left(\frac{h_r^2}{r} + \frac{h_\theta^2 + h_\varphi^2}{r \operatorname{sen} \theta} \right),$$

donde $M = \text{const} > 0$.

§ 2. Planteamiento de los problemas de contorno de red para la ecuación de Poisson en el caso de las condiciones de frontera de Dirichlet

En el § 1 estudiábamos las aproximaciones elementales en diferencias de la ecuación de Poisson en los sistemas de coordenadas cartesianas, polares, cilíndricas y esféricas.

Ahora pasemos a la formulación de los correspondientes problemas en diferencias de Dirichlet. Con este objetivo hace falta establecer las condiciones de contorno para los nodos de frontera de la red y en el caso de una frontera curvilínea, escribir las ecuaciones en diferencias para los nodos de la red cercanos a la frontera. Justamente al planteamiento de los problemas de contorno en diferencias se dedica el presente párrafo.

1. Problema en diferencias de Dirichlet para un rectángulo. Sea dado en el plano Ox_1x_2 un recinto acotado G con la frontera Γ. En el $\overline{G} = G \cup \Gamma$ se considera el problema de Dirichlet para la ecuación de Poisson: se pide hallar la solución $u(x)$ continuo en el $\overline{G}$ de la ecuación

$$\Delta u = -f(x), \quad x = (x_1, x_2) \in G, \tag{1}$$

la cual satisface las condiciones de frontera

$$u = g(x), \quad x = (x_1, x_2) \in \Gamma, \tag{2}$$

donde $f(x)$ y $g(x)$ son las funciones dadas.

Antes de aproximar el problema (1), (2) por el problema en diferencias es menester para el recinto G introducir una red. Al construir la red en el $\overline{G}$, conviene considerar la singularidad de su frontera. Hay que escoger aquella red sobre la cual es lo más cómodo aproximar el problema (1), (2). Así, por ejemplo, si el recinto G es un rectángulo de lados paralelos a los ejes de coordenadas

$$G = \{x = (x_1, x_2) \mid a_\alpha < x_\alpha < b_\alpha, \ \alpha = 1, 2\},$$

en tal caso se deben concordar las magnitudes de los pasos h_1 y h_2 de la red uniforme rectangular con las longitudes de los lados del rectángulo $(b_1 - a_1)$ y $(b_2 - a_2)$. A saber, es racional considerar que

$$h_1 = (b_1 - a_1)/N, \quad h_2 = (b_2 - a_2)/N_2, \tag{3}$$

donde $N_1 > 0$ y $N_2 > 0$ son números enteros. Entonces, en calidad de la red en el $\overline{G}$ se puede tomar el siguiente conjunto de puntos:

$$\overline{\omega} = \{x_i = (x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}) \mid x_\alpha^{(i_\alpha)} = a_\alpha + i_\alpha h_\alpha, \ 0 \leqslant i_\alpha \leqslant N_\alpha, \ \alpha = 1, 2\}. \tag{4}$$

El conjunto

$$\omega = \{x_i \mid 0 < i_1 < N_1, \ 0 < i_2 < N_2\}$$

es el conjunto de los nodos interiores de la red $\overline{\omega}$ mientras que

$$\gamma = \overline{\omega} \setminus \omega = \{x_i = (x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}) \mid i_1 = 0, N_1, \quad 0 < i_2 < N_2 \ \text{ y } \ 0 < i_1 < N_1, \ i_2 = 0, N_2\}$$

es el conjunto de los nodos de frontera de esta red.

La red $\bar{\omega}$ construida posee la particularidad de que es uniforme en cada una de las direcciones x_1 y x_2 y de que su frontera γ está dispuesta en la frontera Γ del rectángulo G. Si hubiéramos renunciado a una elección especial de los pasos (3), nos habríamos visto obligados a conformarnos o bien con que la red en el G no es uniforme, o bien con que la frontera γ de la red o su parte no pertenece a la frontera Γ del rectángulo G. La primera circunstancia es menos inconveniente al aproximar la ecuación (1) y la segunda, al aproximar la condición de frontera (2).

Pues bien, la red en el $\bar{G}$ está construida. Sobre esta red el problema (1), (2) se puede aproximar de la manera siguiente:

$$\Lambda y = -f(x), \quad x = (x_1, x_2) \in \omega, \tag{5}$$

$$y = g(x), \quad x = (x_1, x_2) \in \gamma, \tag{6}$$

donde Λ es el operador de red de cinco puntos:

$$\Lambda y = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} =$$

$$= \frac{1}{h_1^2}(y^{(+1_1)} - 2y + y^{(-1_1)}) + \frac{1}{h_2^2}(y^{(+1_2)} - 2y + y^{(-1_2)}). \tag{7}$$

En la red $\bar{\omega}$ también puede tener lugar otra aproximación del problema (1), (2). A saber,

$$\Lambda' y = -\varphi(x), \quad x \in \omega, \tag{8}$$

$$y = g(x), \quad x \in \gamma, \tag{9}$$

donde Λ' es el operador de nueve puntos, determinable por la fórmula (6) del § 1, es decir,

$$\Lambda' y = \Lambda y + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \Lambda_1 \Lambda_2 y \tag{10}$$

ó

$$\Lambda' y = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2},$$

donde $\Lambda_\alpha y = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}$, $\alpha = 1, 2$ y $\varphi(x)$ se preestablece mediante la fórmula (7) ó (7′) del § 1.

Si los lados del rectángulo $(b_1 - a_1)$ y $(b_2 - a_2)$ son conmensurables, en el G se puede colocar la red cuadrada con el paso h de modo que su frontera γ de nuevo pertenezca a la Γ. Sobre esta red se puede aproximar el problema (1), (2) por el problema

$$\left.\begin{aligned} &\Lambda' y = \Lambda y + \frac{h^2}{6} \Lambda_1 \Lambda_2 y = -\varphi(x), && x \in \omega, \\ &y = g(x), && x \in \gamma, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

donde Λ' se determina según la fórmula (10), siendo $h_1 = h_2 = h$, y $\varphi(x)$, según la expresión (8) del § 1.

2. Recintos de frontera curvilínea. No obstante la elección de una red rectangular no es racional, si el recinto G es un círculo. En este caso naturalmente se pasa a las coordenadas polares y en el G se introduce una red polar. Sea G el círculo de radio R y de centro en el origen de coordenadas

$$G=\{x=(x_1,\ x_2)\mid x_1^2+x_2^2<R^2\}.$$

La ecuación (1) en coordenadas polares tiene la forma

$$\Delta_{r,\varphi}u=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=L_r u+L_\varphi u=-f(r,\ \varphi). \quad (12)$$

En el párrafo anterior se trató de la elección racional de la red para la aproximación de la ecuación (12). Ha resultado cómodo no incluir el punto $r=0$ en el número de los nodos y disponer los nodos de la red más cercanos a este punto a una distancia de $0{,}5h_r$, donde h_r es el paso de la red según r. Para facilitar la aproximación de las condiciones de frontera, siendo $r=R$, la red en el $\overline{G}$ se toma de la forma siguiente:

$$\overline{\omega}=\{(r_n,\ \varphi_m)\mid r_n=(n+0{,}5)\,h_r,\quad n=0,1,2,\ldots,N-1,N,$$
$$h_r=R/(N+0{,}5),\ \varphi_m=mh_\varphi,\ m=0,\ 1,\ \ldots,\ M-1,$$
$$h_\varphi=2\pi/M\}.$$

El conjunto de los nodos interiores de la red ω es

$$\omega=\{(r_n,\ \varphi_m)\in G,\ n=0,1,\ldots,N-1,\ m=0,1,2,\ldots,M-1\},$$

en tanto que los nodos de frontera pertenecen al conjunto $\gamma=\overline{\omega}\setminus\omega$ y tienen las coordenadas $(R,\ \varphi_m)$, $m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ M-1$. Sobre esta red el problema (1), (2) se aproxima por el siguiente problema:

$$\left.\begin{aligned}\overline{\Lambda}y=\overline{\Lambda}_r y+\Lambda_\varphi y=-f(r,\ \varphi),\ \ (r,\ \varphi)\in\omega,\\ y(r,\ \varphi)=y(r,\ \varphi+2\pi),\ \ (r,\ \varphi)\in\omega,\\ y=g(\varphi),\ \ (r,\ \varphi)\in\gamma,\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

donde el operador $\overline{\Lambda}$ se determina según las fórmulas (29) y (30) del § 1.

Examinemos dos ejemplos más de los recintos en los cuales la red se debe escoger del modo singular.

Sea G un triángulo rectangular cuyos catetos están sobre los ejes de coordenadas:

$$G=\left\{x=(x_1,\ x_2)\mid 0<x_1<a_1,\ 0<x_2<-\frac{a_2}{a_1}x_1+a_2\right\},$$

donde $a_1>0$ y $a_2>0$ son las longitudes de los catetos; designemos por Γ la frontera del triángulo.

Dividamos cada uno de los catetos en un mismo número N de partes, suponiendo que

$$h_1 = \frac{a_1}{N}, \quad h_2 = \frac{a_2}{N},$$

donde N es un número entero. Formemos la red ω, en el recinto G, de los puntos de intersección de las rectas $x_1 = i_1 h_1$, $x_2 = i_2 h_2$, donde $i_1, i_2 = 0, 1, 2, \ldots$ Con esta elección de h_1 y h_2 las rectas $x_1 = i_1 h_1$ y $x_2 = i_2 h_2$ se intersecan con la hipotenusa en los mismos puntos, los cuales son nodos de frontera de la red. La red obtenida se denomina *adaptada* (coordinada). Es uniforme en cada una de las direcciones. Designemos a través de $\bar{\omega}$ el conjunto de todos los nodos de la red en el recinto $\bar{G} = G \cup \Gamma$

$$\bar{\omega} = \{x_i = (i_1 h_1, i_2 h_2) \in \bar{G} \mid 0 \leqslant i_1 \leqslant N, \\ i_2 \leqslant N - i_1, \ i_1, \ i_2 = 0, 1, \ldots, N\};$$

sean $\omega = \{x_i = (i_1 h_1, i_2 h_2) \in G \mid 0 < i_1 < N, \ i_2 < N - i_1\}$ el conjunto de los nodos interiores y

$$\gamma = \bar{\omega} \setminus \omega = \{x_i = (i_1 h_1, i_2 h_2) \in \Gamma, \ i_1 = 0, N, \ i_2 = N - i_1\}$$

el conjunto de los nodos de frontera.

Para todos los nodos interiores de la red indicada se puede escribir el esquema de cinco puntos $\Lambda y = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} = -f(x)$, donde Λ se determina a base de la fórmula (7) a la vez que para la frontera se puede preestablecer la función $g(x)$, tomando $y = g(x)$ con $x \in \gamma$. En definitiva llegaremos al problema de forma de (5), (6).

Sea el recinto G un triángulo curvilíneo

$$G = \{x = (x_1, x_2) \mid x_\alpha > 0, \ \alpha = 1, 2, \ x_2 < F(x_1)\},$$

donde $F(x_1)$ es una función continua monótona decreciente y

$$-\infty < F'(x_1) < 0.$$

Está claro que los lados rectilíneos de este triángulo tienen las longitudes $a_1 = F^{-1}(0)$, donde $F^{-1}(x_2)$ es la función inversa a la $F(x_1)$, y $a_2 = F(0)$ respectivamente. Si en el G se intenta a introducir una red uniforme según cada uno de los ejes, suponiendo, por ejemplo, que $h_1 = F^{-1}(0)/N_1 = a_1/N_1$, $h_2 = F(0)/N_2 = a_2/N_2$, puede ocurrir que las rectas $x_1 = i_1 h_1$ intersequen la curva $x_2 = F(x_1)$ en unos puntos mientras que las rectas $x_2 = i_2 h_2$, en otros, es decir, es posible una situación semejante a la representada en la fig. 8.

Si la red en el G se considera uniforme, su frontera γ no pertenecerá por completo a la frontera Γ del recinto inicial lo que dificultará la aproximación de las condiciones de frontera. Al tomar

como frontera γ los puntos de intersección de las rectas señaladas más arriba con la frontera Γ, entonces la red ω en el entorno de la sección curvilínea de la frontera Γ no será uniforme.

Para los recintos de tipo mencionado es conveniente a veces, aceptar la llamada red no uniforme adaptada. Indicando, por ejemplo, una red uniforme con el paso $h_1 = F^{-1}(0)/N$ a lo largo del eje x_1, la red a lo largo del eje x_2 la escogeremos, suponiendo que

$$x_2^{(i_2)} = F(x_1^{(N-i_2)}),\quad x_1^{(N-i_1)} = (N-i_1)h_1,\quad i_1 = 0, 1, 2, \ldots, N.$$

Dicha red está representada en la fig. 9. Todos los nodos de frontera de la red se disponen en la frontera del triángulo rectilíneo.

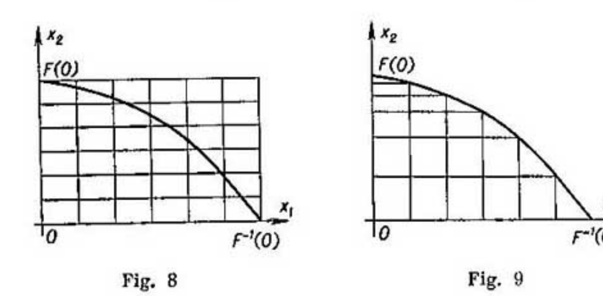


Fig. 8 Fig. 9

La red es adaptada. Sus pasos según x_2 se indican mediante la correlación

$$h_2^{(i_2)} = x_2^{(i_2)} - x_2^{(i_2-1)} = F(x_1^{(N-i_2)}) - F(x_1^{(N-i_2+1)}) =$$
$$= F'(x_1^{(N-i_2)} + \theta h_1)\, h_1 = O(h_1),\quad 0 \leqslant \theta \leqslant 1,\ \text{ o sea, }\ h_2 = O(h_1).$$

Sobre la red obtenida el problema (1), (2) se puede aproximar por el esquema (5), (6), donde Λ es un operador corriente de cinco puntos determinable a base de la fórmula (22) del § 1.

3. **Recinto de contorno arbitrario.** Sea la frontera Γ del recinto G una curva lisa a trozos de tipo suficientemente corriente. En este caso cuesta trabajo enunciar algunas recomendaciones comunes acerca de la elección de la red especial. Para obtener la red $\overline{\omega}(\overline{G})$ en el recinto $\overline{G} = G \cup \Gamma$, preestablezcamos en el plano Ox_1x_2 una red uniforme rectangular Ω formada por los puntos de intersección de dos familias de rectas paralelas $x_1 = i_1h_1$; $x_2 = i_2h_2$, $i_1, i_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; los puntos $x_i = (x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}) = (i_1h_1, i_2h_2)$ son los nodos de la red Ω. Teniendo en cuenta la aproximación de la ecuación (1)

sobre el modelo de cinco puntos, los nodos $x = (x_1, x_2)$ y $x' = (x'_1, x'_2)$ los denominaremos vecinos *), si

$$\left|\frac{x_1-x'_1}{h_1}\right|+\left|\frac{x_2-x'_2}{h_2}\right|=1 \quad ó \quad |i_1-i'_1|+|i_2-i'_2|=1,$$

donde $x_\alpha = i_\alpha h_\alpha, x'_\alpha = i'_\alpha h_\alpha, \alpha = 1, 2$, de modo que $|i_\alpha - i'_\alpha| = 1$ ó 0. Designemos por $\omega = \{x = (i_1h_1, i_2h_2) \in G\}$ el conjunto de todos aquellos nodos $x = (i_1h_1, i_2h_2)$, los cuales se encuentran dentro del recinto G; a estos nodos los llamaremos nodos interiores de la red $\overline{\omega}$ $(\overline{G})$. Un nodo interior $x_i \in \omega$ se llama nodo regular, si todos los cuatro nodos vecinos de éste, que forman en conjunto con x_i el

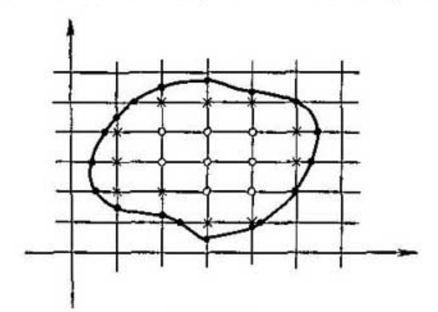


Fig. 10

modelo de cinco puntos tipo «cruz», pertenecen al $\overline{G}$. El conjunto de los nodos interiores regulares la denotemos a través de $\overset{\bullet}{\omega}$. Si aunque uno de estos cuatro nodos vecinos a x_i no pertenecen al $\overline{G}$ (es decir, o bien a G o bien a Γ), denominaremos semejante nodo x_i nodo interior irregular de la red $\overline{\omega}$. El conjunto de todos los nodos interiores irregulares designémoslo por $\overset{*}{\omega}$, así que $\overset{\circ}{\omega} \cup \overset{*}{\omega} = \omega$. Los puntos de intersección de las rectas $x_1 = i_1h_1, x_2 = i_2h_2, i_1, i_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ con la frontera Γ del recinto G los denominaremos nodos de frontera y el conjunto de todos los nodos de frontera designaremos con el símbolo γ. De esta manera, en G está construida la red $\overline{\omega} = \omega \cup \gamma$, la cual consta de los nodos interiores ω y de los nodos de frontera γ (fig. 10).

*) El concepto de nodo vecino depende de modo esencial del tipo de la ecuación que se va a aproximar, con más precisión, del tipo del modelo sobre el cual se aproxima la ecuación. La definición aportada en este libro de los nodos vecinos está relacionada con la aproximación de la ecuación (1) sobre el modelo de cinco puntos tipo «cruz», compuesto de los nodos (x_1, x_2), $(x_1 - h_1, x_2)$, $(x_1 + h_1, x_2)$, $(x_1x_2 - h_2)$, $(x_1, x_2 + h_2)$.

Planteemos el problema en diferencias que aproxima al problema (1), (2) sobre la red $\overline{\omega}$. Para ello es necesario aproximar sobre la $\overline{\omega}$ la ecuación (1) y la condición de frontera (2). Sobre el conjunto de los nodos regulares interiores $\overset{\circ}{\omega}$ aproximaremos la ecuación (1) según el modelo de cinco puntos tipo «cruz» por la ecuación (5). En los nodos de frontera γ indiquemos el valor de la función incógnita

$$y = g(x) \quad \text{para} \quad x \in \gamma.$$

Nos falta escribir la aproximación para los nodos irregulares $\overset{*}{\omega}$.

Aquí son posibles diferentes variantes:

1. *Deriva simple o interpolación de orden nulo.* En el problema de contorno de red los nodos $\overset{*}{\omega}$ se consideran como de frontera, y la condición para los $\overset{*}{\omega}$ se da mediante la correlación

$$y(x) = g(\overline{x}), \qquad x \in \overset{*}{\omega}, \tag{14}$$

donde $x \in \gamma$ es el nodo de la frontera γ más cercano a x. La correlación (14) se puede interpretar como interpolación de orden nulo. Es fácil ver que el error con el cual se preestablece la solución incógnita en los nodos $\overset{*}{\omega}$ es la magnitud $O(|h|)$.

Fig. 11

2. *Interpolación de primer orden.* El conjunto de los nodos $\overset{*}{\omega}$ también se considera de frontera, pero la condición de contorno para el problema de red se indica por medio de la interpolación de primer orden a lo largo de uno de los ejes (x_1 ó x_2). Por ejemplo, para el caso representado en la fig. 11 el valor de la solución incógnita en el nodo *0* se determina empleando la interpolación lineal a lo largo del eje x_1 respecto a los nodos *3* y *1*, es decir,

$$y_0 = \frac{h_1^- y_1 + h_1 y_3}{h_1^- + h_1} \tag{15}$$

(se puede verificar que el error de aproximación de la correlación (15) es $O(|h|^2)$).

OBSERVACIÓN. En ciertos casos es racional considerar los nodos $\overset{*}{\omega}$ como interiores. Entonces, la correlación (15) escrita en la forma

$$\Lambda_1 y_0 = \frac{1}{h_1}\left(\frac{y_1 - y_0}{h_1} - \frac{y_0 - y_3}{h_1^-}\right) = 0, \tag{16}$$

se debe estimar como aproximación de la ecuación (1). Es evidente que el error de aproximación de la ecuación (1) por la correlación

(16) es O (1). Con esta interpretación de los nodos $\overset{*}{\omega}$ es más natural en vez de la (16) escribir la correlación

$$\frac{1}{h_1}\left(\frac{y_1-y_0}{h_1}-\frac{y_0-y_3}{h_1^-}\right)+\frac{y_2-2y_0+y_4}{h_2^2}=-f_0, \qquad (17)$$

cuyo error de aproximación también es O (1) (compárese 20)). Actualmente la deriva simple y la interpolación de primer orden casi no se usan en la práctica.

3. *Aproximación de la ecuación sobre una red no uniforme.* Los nodos $\overset{*}{\omega}$ se consideran interiores, y la ecuación (1) se aproxima según el modelo de cinco puntos tipo «cruz» sobre una red no uniforme. Uno de los tipos posibles de los modelos irregulares está representado en la fig. 11. El nodo *3* es de frontera, los nodos *1*, *2* y *4* son interiores. En tal caso

$$\Lambda^* y_0=\frac{1}{\hbar_1}\left(\frac{y_1-y_0}{h_1}-\frac{y_0-y_3}{h_1^-}\right)+\frac{1}{h_2^2}(y_2-2y_0+y_4)=-f_0, \qquad (18)$$
$$\hbar_1=0{,}5\,(h_1+h_1^-).$$

En caso general puedo suceder que los nodos $x^{(-1_1)}$ (ó $x^{(+1_1)}$), $x^{(+1_2)}$ (ó $x^{(-1_2)}$) son de frontera. Entonces, la ecuación de Poisson se aproxima sobre el modelo irregular de cinco puntos tipo «cruz» de acuerdo con

$$\Lambda^* y=\Lambda_1^* y+\Lambda_2^* y \quad \text{con} \quad x\in\overset{*}{\omega},$$

donde

$$\Lambda_\alpha^* y=y_{\bar{x}_\alpha\hat{x}_\alpha}=$$
$$=\begin{cases}\dfrac{1}{\hbar_\alpha}\left(\dfrac{y^{(+1_\alpha)}-y}{h_\alpha}-\dfrac{y-y^{(-1_\alpha)}}{h_\alpha^*}\right), & \text{si} \quad x^{(-1_\alpha)}\in\gamma,\\[2ex] \dfrac{1}{\hbar_\alpha}\left(\dfrac{y^{(+1_\alpha)}-y}{h_\alpha^*}-\dfrac{y-y^{(-1_\alpha)}}{h_\alpha}\right), & \text{si} \quad x^{(+1_\alpha)}\in\gamma,\end{cases} \qquad (19)$$

$\hbar_\alpha=0{,}5\,(h_\alpha+h_\alpha^*)$, h_α^* es la distancia de x al nodo de frontera $x^{(-1_\alpha)}\in\gamma$ ó $x^{(+1_\alpha)}\in\gamma$. El error de aproximación en el nodo irregular $\psi^*=\Lambda^* u-Lu$, evidentemente, tiene el primer orden respecto a $|h|$, puesto que

$$\Lambda_\alpha^* u-L_\alpha u=O(\hbar_\alpha)=O(h_\alpha).$$

4. *Segundo procedimiento de aproximación de la ecuación en un nodo irregular de una red no uniforme (el esquema conservador).* El estudio del operador en diferencias coincidente con $\Lambda y=y_{\bar{x}_1x_1}+$ $+y_{\bar{x}_2x_2}$ en los nodos regulares $x\in\overset{\circ}{\omega}$ y con $\Lambda^* y=y_{\bar{x}_1\hat{x}_1}+y_{\bar{x}_2\hat{x}_2}$ en los nodos irregulares $x\in\overset{*}{\omega}$ como operador en el espacio de las

funciones de red dadas sobre $\bar{\omega}$ e iguales a cero en γ, muestra que en algunos casos este operador pierde una serie de las propiedades importantes inherentes al operador diferencial $Lu = \Delta u$: la autoconjugación y la propiedad de signo determinado. Este hecho está relacionado con el procedimiento de aproximación del operador laplaciano en los nodos irregulares. Cambiando esta aproximación, obtendremos el operador autoconjugado y de signo determinado del problema en diferencias de Dirichlet sobre la red $\bar{\omega}$. Es de suponer

$$\Lambda^* y = \Lambda_1^* y + \Lambda_2^* y, \quad \Lambda^* y = -f(x) \quad \text{para} \quad x \in \overset{*}{\omega},$$

donde

$$\Lambda_\alpha^* y = \begin{cases} \dfrac{1}{h_\alpha}\left(\dfrac{y^{(+1_\alpha)} - y}{h_\alpha} - \dfrac{y - y^{(-1_\alpha)}}{h_\alpha^*}\right), & x^{(-1_\alpha)} \in \gamma, \\ \dfrac{1}{h_\alpha}\left(\dfrac{y^{(+1_\alpha)} - y}{h_\alpha^*} - \dfrac{y - y^{(-1_\alpha)}}{h_\alpha}\right), & x^{(+1_\alpha)} \in \gamma. \end{cases} \tag{20}$$

La diferencia formal entre el operador de (19) y el de (20) consiste en la sustitución del factor $1/\hbar_\alpha$ de la fórmula (19) por el factor $1/h_\alpha$ en la fórmula (20). El espacio H de las funciones de red que están dadas sobre $\bar{\omega}$ y se anulan en γ está provisto del producto escalar

$$(y, v) = \sum_{x \in \omega} y(x)\, v(x)\, h_1 h_2.$$

La propiedad de autoconjugación del operador en diferencias, mencionado anteriormente, significa que la matriz del sistema de ecuaciones algebraicas lineales (ecuaciones en diferencias) es simétrica respecto al vector incógnito Y (de la función de red $y(x)$, $x \in \omega$). Esto permite para hallar $y = y(x)$ utilizar los métodos iterativos de rápida convergencia, elaborados para las ecuaciones $Ay = f$ de matriz simétrica A. Por eso el último procedimiento (20) de aproximación de la ecuación $\Delta u = -f$ en los nodos interiores irregulares $x \in \overset{*}{\omega}$ merece preferencia.

De esta forma, el problema en diferencias de Dirichlet para la ecuación de Poisson se plantea del modo siguiente:

$$\left.\begin{aligned} &\Lambda y = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} = -f(x) && \text{en los nodos regulares } x \in \overset{\circ}{\omega}, \\ &\Lambda^* y = -f(x) && \text{en los nodos irregulares } x \in \overset{*}{\omega}, \\ &y = g(x) && \text{en los nodos de frontera } x \in \gamma, \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

donde Λ^* se determina por la expresión (20).

Si Λ^* se determina mediante la fórmula (19), el problema correspondiente será de número (21').

Si y es la solución del problema (21) y u es la solución del problema (1), (2), entonces para el error $z(x) = y(x) - u(x)$ se verifican las condiciones

$$\left.\begin{array}{llll} \Lambda z = -\psi(x) & \text{para} & x \in \overset{\circ}{\omega}, \quad \Lambda^* z = -\psi^*(x) & \text{para} \quad x \in \overset{*}{\omega}, \\ z(x) = 0 & \text{para} & x \in \gamma, & \end{array}\right\} \quad (22)$$

donde $\psi(x) = \Lambda u + f, \quad \psi^* = \Lambda^* u + f.$

Si la función $u = u(x)$ tiene en el $\overline{G}$ derivadas acotadas de hasta el cuarto orden, o sea $u \in C^4(\overline{G})$, entonces el error de aproximación del esquema conservador autoconjugado (21) es $\psi(x) = O(|h^2|)$, $\psi^*(x) = O(1)$. A pesar de la disminución del orden de aproximación (en comparación con el esquema (19)) en los nodos interiores irregulares, el esquema conservador (21) tiene el segundo orden de precisión en la métrica uniforme, lo que será mostrado en el § 4 de este capítulo. La investigación de la cuestión acerca de la convergencia y el orden de precisión del esquema en diferencias (21) se reduce a la acotación de la solución z del problema (22) mediante los miembros derechos ψ y ψ^*. Las acotaciones para la solución del problema (22) serán obtenidas en el § 4. Están fundadas sobre el principio de máximo para las ecuaciones de red.

§ 3. Principio de máximo

En este párrafo se estudia cierta clase de las funciones de red para las cuales tiene lugar el llamado principio de máximo. Dicha clase contiene la mayoría de las aproximaciones de red principales de los problemas de contorno para las ecuaciones elípticas de segundo orden las cuales no tienen derivadas mixtas. El principio de máximo permite establecer la solubilidad de un problema de red y en ciertos casos obtener la acotación apriorística de su solución.

1. Ecuaciones de red de tipo general. Sea Ω cierto conjunto finito de los puntos (nodos) $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ del espacio euclidiano p-dimensional (red). Sea dado en cada uno de los puntos $x \in \Omega$ un modelo $M(x) \subset \Omega$, es decir, cierto subconjunto de los puntos x de Ω. Designemos por $M' \equiv M(x) \setminus \{x\}$ el entorno del punto x, o sea, el conjunto de todos los nodos del modelo $M(x)$ excepto el propio nodo x. Examinemos la ecuación

$$Sy(x) = F(x), \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

donde $y(x)$ es la función incógnita; $F(x)$, la función de red dada (el miembro segundo de la ecuación) y S, el operador lineal deter-

minable por la fórmula

$$Sv(x) \equiv A(x)\,v(x) - \sum_{\xi \in M'(x)} B(x, \xi)\,v(\xi), \tag{2}$$

cuyos coeficientes $A(x)$ y $B(x, \xi)$ son las funciones de red dada $x \in \Omega$ y $\xi \in \Omega$.

Supondremos que los coeficientes A y B satisfacen las condiciones

$$A(x) > 0, \quad B(x, \xi) > 0, \quad \forall x \in \Omega \quad \text{y} \quad \forall \xi \in M'(x),$$
$$D(x) \equiv A(x) - \sum_{\xi \in M'(x)} B(x, \xi) \geqslant 0. \tag{3}$$

Sea x un nodo arbitrario de la red Ω. Son posibles dos casos: a) o bien el entorno $M'(x)$ de este nodo es un conjunto vacío, b) o bien el $M'(x)$ contiene por lo menos un solo nodo $\xi \in \Omega$.

Si el entorno $M'(\bar{x})$ del nodo $\bar{x}$ es el conjunto vacío, la ecuación (1) para $x = \bar{x}$ tiene la forma

$$A(\bar{x})\,y(\bar{x}) = F(\bar{x}) \quad \text{ó} \quad y(\bar{x}) = g(\bar{x}) \quad (g = F/A).$$

Este punto $\bar{x}$ llamarémoslo nodo de frontera, los demás nodos, cuyo entorno consta por lo menos de un punto, serán nodos interiores *). Designemos por γ el conjunto de todos los nodos de frontera y por ω, el conjunto de todos los nodos interiores de la red Ω, de modo que $\omega \cup \gamma = \Omega$.

Con la existencia de puntos de frontera el problema (1) se formula del modo siguiente: hallar la solución de la ecuación

$$Sy(x) = F(x) \quad \text{para} \quad x \in \omega, \tag{4}$$

que verifique la condición de frontera

$$y(x) = g(x) \quad \text{para} \quad x \in \gamma, \tag{5}$$

donde $F(x)$ y $g(x)$ son las funciones dadas. Esto es el primer problema de contorno en la red Ω.

Analicemos como ejemplo el problema en un rectángulo (5), (6) del § 2. Se puede escribir la ecuación en diferencias $\Lambda y = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} = -f(x)$ de la manera siguiente:

$$2\left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}\right) y(x) - \frac{1}{h_1^2}\left(y^{(-1_1)} + y^{(+1_1)}\right) - \frac{1}{h_2^2}\left(y^{(-1_2)} + y^{(+1_2)}\right) = f(x),$$
$$x \in \omega, \quad y(x) = g(x), \quad x \in \gamma.$$

La comparación con la (4) muestra que aquí $A(x) = 2\left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}\right) > 0$, $B(x, \xi) = 1/h_1^2$ ó $1/h_2^2$, $F(x) = f(x)$, $D(x) \equiv 0$.

*) Es evidente que las nociones introducidas de nodo interior y nodo de frontera están relacionadas con el tipo del operador S, es decir, dependen de los modelos $M(x)$, $x \in \Omega$.

Al tratar de los problemas segundo y tercero de contorno para las ecuaciones elípticas en diferencias (en el caso elemental, para la ecuación en diferencias de Poisson), la frontera en el sentido de la definición hecha anteriormente, no existe. Los nodos que se encuentran en la frontera Γ del recinto G se distinguen únicamente por que el modelo en estos nodos es menor que el de los nodos interiores de la red. Por ejemplo, en el caso del tercer problema de contorno para la ecuación de Poisson tenemos $D(x) > 0$ en los nodos $x \in \Gamma$ y $D(x) = 0$ en los nodos restantes.

Introduzcamos el concepto de red conexa. Sean $\bar{x}$ y $\bar{\bar{x}}$ son dos nodos cualesquiera de la red que no son de frontera al mismo tiempo; para precisión consideraremos que $\bar{x}$ no pertenece a la frontera γ, es decir, $\bar{x} \in \omega$. La red Ω se denomina *conexa*, si para cualesquier $\bar{x} \in \omega$, $\bar{\bar{x}} \in \Omega$ se puede indicar una sucesión de los nodos $x_1, x_2, x_3, \ldots$ $\ldots, x_m$ tal que todo nodo siguiente pertenezca al entorno del precedente, hablando más exactamente,

$$x_1 \in M'(\bar{x}),\ \ x_2 \in M'(x_1), \ldots, x_m \in M'(x_{m-1}),\ \ \bar{\bar{x}} \in M'(x_m). \quad (6)$$

En lo sucesivo se consideran sólo los recintos Ω y subrecintos Ω' de red conexas.

OBSERVACIÓN 1. Es obvio que para las redes conexas Ω el conjunto de los nodos interiores ω también forma una red conexa, además tiene lugar la correlación

$$\Omega = \bigcup_{x \in \omega} M(x).$$

Para todo subrecinto de red conexa $\Omega' \subseteq \Omega$ lo designaremos a través de

$$\bar{\Omega}' = \bigcup_{x \in \Omega'} M(x).$$

2. Principio de máximo.

TEOREMA 1 (principio de máximo). *Sean Ω un recinto de red y S un operador dado en Ω con auxilio de la correlación* (2). *Sean Ω un recinto conexo y $\Omega' \subseteq \Omega$, un subrecinto conexo de Ω, sobre el cual los coeficientes del operador S satisfacen las condiciones* (3). *En tal caso, si la función de red $y(x)$ dada en Ω no es constante en*

$$\bar{\Omega}' = \bigcup_{x \in \Omega'} M(x) \subseteq \Omega \quad \text{y} \quad Sy(x) \leqslant 0\ (Sy(x) \geqslant 0)$$

para $x \in \Omega'$, entonces $y(x)$ no puede tomar en Ω' el valor máximo positivo (mínimo negativo).

DEMOSTRACIÓN. 1. Sea

$$Sy(x) \leqslant 0. \quad (7)$$

Supongamos que existe un nodo $\bar{x} \in \Omega'$ en el cual $y(x)$ toma el valor máximo positivo:

$$y(\bar{x}) = \max_{x \in \Omega'} y(x) > 0. \tag{8}$$

Entonces en este nodo

$$Sy(\bar{x}) \equiv A(\bar{x})\, y(\bar{x}) - \sum_{\xi \in M'(\bar{x})} B(\bar{x}, \xi)\, y(\xi) =$$
$$= D(\bar{x})\, y(\bar{x}) + \sum_{\xi \in M'(\bar{x})} B(\bar{x}, \xi)\,(y(\bar{x}) - y(\xi)). \tag{9}$$

Como de acuerdo con las condiciones (3) $D(\bar{x}) \geqslant 0$ y a base de la suposición (8) $y(\bar{x}) > 0$, el primer sumando del miembro segundo de (9) no es negativo. A base de la misma suposición $y(\bar{x}) \geqslant y(\xi)$ y de acuerdo con una de las condiciones de (3) $B(x, \xi) > 0$. Por lo tanto, los sumandos posteriores del miembro segundo de (9) tampoco pueden ser negativos. Por consiguiente,

$$Sy(\bar{x}) \geqslant 0.$$

Esta afirmación comprende dos posibilidades: bien

$$Sy(\bar{x}) > 0, \tag{10}$$

bien

$$Sy(\bar{x}) = 0. \tag{11}$$

La afirmación (10) no puede ser justa ya que contradice a la condición (7) del teorema. De aquí se deduce que la suposición (8) no es posible y el teorema queda demostrado, o de la (10) y (11) la última es factible. Estudiemos la segunda posibilidad. Partiendo de las correlaciones (8), (9) y de la condición (3) se desprende que, siendo $D(\bar{x}) > 0$, la afirmación (11) no puede ser justa y consecuentemente bien la suposición (8) no es correcta y el teorema está demostrado, bien $D(\bar{x}) = 0$. Sea $D(\bar{x}) = 0$. Entonces, empleando las correlaciones (8), (9), hallamos que

$$y(\xi) = y(\bar{x}), \quad \xi \in M'(\bar{x}). \tag{12}$$

Dado que según la condición $y(x) \not\equiv \text{const}$ para $x \in \bar{\Omega}'$, entonces existe un nodo $\bar{\bar{x}} \in \bar{\Omega}'$ tal que $y(\bar{\bar{x}}) < y(\bar{x})$. En virtud de la conexión de $\bar{\Omega}'$ se pueden indicar una sucesión de los nodos $x_1, x_2, \ldots, x_m$ $(x_i \in \Omega')$ que verifica las condiciones (6). Basándose en (12) $y(x_1) = y(\bar{x})$. Sin limitar la generalización se puede considerar que

$$y(x_1) = y(x_2) = \ldots = y(x_m) = y(\bar{x}),$$

puesto que, si esta cadena de igualdades se hubiera podido seguir sólo hasta cierto m_0, $1 < m_0 < m$, entonces en calidad de $\overline{\overline{x}}$ se habría podido tomar x_{m_0+1}.

Calculemos

$$Sy(x_m) = D(x_m)\,y(x_m) + \sum_{\xi \in M'(x_m)} B(x_m, \xi)(y(x_m) - y(\xi)) \geqslant$$
$$\geqslant B(x_m, \overline{\overline{x}})(y(x_m) - y(\overline{\overline{x}})) = B(x_m, \overline{\overline{x}})(y(\overline{x}) - y(\overline{\overline{x}})) > 0.$$

Esta afirmación contradice a la condición (7) del teorema y, por consiguiente, la suposición (8) no es válida. La primera afirmación del teorema se ha demostrado.

2. Si $Sy(x) \geqslant 0$, es suficiente sustituir $y(x)$ por $(-y(x))$, para la cual $S(-y) \leqslant 0$, y hacer uso de los razonamientos citados anteriormente. El teorema 1 queda demostrado.

3. Corolarios del principio de máximo.

COROLARIO 1. *Si $Sy(x) \leqslant 0$ ($Sy(x) \geqslant 0$) en la Ω y existe por lo menos un solo nodo x_0 de la red Ω en el cual*

$$D(x_0) > 0, \quad x_0 \in \Omega, \tag{13}$$

entonces $y(x) \leqslant 0$ ($y(x) \geqslant 0$) en la Ω.

DEMOSTRACION. Sea $Sy(x) \leqslant 0$. Si $y(x) \equiv \text{const}$ para $x \in \Omega$, calculando el valor de $Sy(x)$ para el nodo $x = x_0$, hallamos que

$$Sy(x_0) = D(x_0)\,y(x_0) - \sum_{\xi \in M'(x_0)} B(x_0, \xi)(y(x_0) - y(\xi)) =$$
$$= D(x_0)\,y(x_0) \leqslant 0.$$

De aquí a base de (13) se deduce que $y(x) \equiv y(x_0) \leqslant 0$. Si $y(x) \not\equiv \text{const}$ para $x \in \Omega$, entonces $y(x) \leqslant 0$ a base del principio de máximo (siendo $\Omega' = \Omega$).

La segunda afirmación se demuestra de modo análogo.

OBSERVACION 2. Si la red Ω contiene los nodos de frontera γ, la condición (13) se cumple automáticamente para $x \in \gamma$.

COROLARIO 2. *Sea que el operador S sobre la Ω verifica las condiciones* (3), (13). *En tal caso el problema* (1), (2) *tiene la solución única.*

Para *demostrar* la existencia y unicidad de la solución del problema (1), (2) a base de las suposiciones hechas, es suficiente cerciorarse de que el problema homogéneo $Sy(x) = 0$ sobre Ω (en el caso del primer problema de contorno $Sy(x) = 0$ en ω e $y(x) = 0$ en γ) tiene sólo la solución trivial. Valiéndonos del corolario 1, concluimos de que bien $y(x) \leqslant 0$, bien $y(x) \geqslant 0$ sobre Ω, puesto que la igualdad $Sy(x) = 0$ es admisible en ambos casos. Estas dos condiciones son compatibles sólo cuando $y(x) \equiv 0$ en Ω.

4. Teorema de comparación y las acotaciones apriorísticas. Partiendo del corolario 1 del principio de máximo, nos convencemos de que es justa y tiene importancia el

TEOREMA 2 (teorema de comparación). *Sea $y(x)$ la solución del problema (1) — (3), (13), a la vez $\bar{y}(x)$ es la solución del mismo problema, cuyo segundo miembro es $\bar{F}(x)$. Entonces, de la condición de que $|F(x)| \leqslant \bar{F}(x)$ sobre Ω se desprende que*

$$|y(x)| \leqslant \bar{y}(x) \quad \text{sobre} \quad \Omega.$$

DEMOSTRACION. En virtud del corolario 1 la función $\bar{y}(x) \geqslant 0$ sobre Ω. Sumemos y restemos las ecuaciones $Sy = F$ y $S\bar{y} = \bar{F}$:

$$S(\bar{y}+y) = \bar{F}(x) + F(x) \geqslant 0, \qquad S(\bar{y}-y) = \bar{F}(x) - F(x) \geqslant 0.$$

Empleando el corolario 1, hacemos la conclusión de que $\bar{y}(x) + y(x) \geqslant 0$ e $\bar{y}(x) - y(x) \geqslant 0$ ó $-\bar{y}(x) \leqslant y(x) \leqslant \bar{y}(x)$, $|y(x)| \leqslant \bar{y}(x)$ sobre Ω, lo que se requiría demostrar.

OBSERVACION 3. En el caso del primer problema de contorno (4) el teorema de comparación quiere decir que de las condiciones

$$|F(x)| \leqslant \bar{F}(x) \text{ en } \omega, \quad |g(x)| \leqslant \bar{g}(x) \text{ en } \gamma$$

se deduce que $|y(x)| \leqslant \bar{y}(x)$ sobre Ω, donde $\bar{y}(x)$ es la solución del problema $S\bar{y} = \bar{F}$ en ω, $\bar{y} = \bar{g}$ en γ.

De esta forma, la solución del problema (1), (2) se puede acotar con auxilio de la *función mayorante* $\bar{y}(x)$, la cual verifica a la ecuación $S\bar{y} = \bar{F}(x)$, cuyo segundo miembro $\bar{F}(x) \geqslant |F(x)|$, por ejemplo, $\bar{F}(x) = |F(x)|$ ó $\bar{F}(x) = \|F(x)\|_C$, etc. En el parágrafo siguiente se va a hallar la función mayorante $\bar{y}(x)$ para el problema en diferencias de Dirichlet.

El teorema de comparación permite obtener de una vez la acotación de la solución del primer problema de contorno (4), (5) en el caso de una ecuación homogénea.

COROLARIO 3. *Para la solución del problema*

$$Sy = 0 \text{ en } \omega, \quad y = g(x) \text{ en } \gamma$$

tiene lugar la acotación apriorística

$$\max_{\omega} |y(x)| \leqslant \max_{\gamma} |g(x)|. \tag{14}$$

DEMOSTRACION. Sea $\bar{y}(x)$ la solución del problema $S\bar{y} = 0$ en ω, $\bar{y} = \bar{g} = |g(x)|$ en γ.

A base del teorema de comparación $|y(x)| \leqslant \bar{y}(x)$. Si $\bar{g}(x) \equiv$ const en γ e $\bar{y} \equiv$ const sobre Ω, entonces, $\max \bar{y}(x) = \max \bar{g}$, y la desigualdad (14) es justa. A su vez, si $\bar{y}(x) \not\equiv$ const en Ω, del principio de máximo, siendo $\Omega' = \omega$, se desprende que el máximo

de la función $\bar{y}(x) \geqslant 0$ en ω no se puede alcanzar y, por lo tanto, $\bar{y}(x) \leqslant \max |\bar{g}|$, de donde se deduce la desigualdad (14).

TEOREMA 3. *Si $D(x) > 0$ en Ω, para la solución $y(x)$ del problema* (1) — (3) *es justa la acotación apriorística*

$$\max_{\Omega} |y(x)| \leqslant \max_{\Omega} \frac{|F(x)|}{D(x)}. \tag{15}$$

DEMOSTRACION. Sea $\bar{y}(x)$ la solución del problema $S\bar{y} = |F(x)|$ sobre Ω y, por consiguiente, $|y(x)| \leqslant \bar{y}(x)$. La función $\bar{y}(x) \geqslant 0$ alcanza su valor máximo en cierto nodo $\bar{x}$: $\bar{y}(\bar{x}) = \max \bar{y}(x) > 0$. Para este nodo la ecuación (1) se escribirá en la forma

$$D(\bar{x})\bar{y}(\bar{x}) + \sum_{\xi \in M'(\bar{x})} B(\bar{x}, \xi)(\bar{y}(\bar{x}) - \bar{y}(\xi)) = |F(\bar{x})|.$$

Como $\bar{y}(\bar{x}) \geqslant \bar{y}(\xi)$, entonces $D(\bar{x})\bar{y}(\bar{x}) \leqslant |F(\bar{x})|$ y

$$\bar{y}(\bar{x}) \leqslant \frac{|F(\bar{x})|}{D(\bar{x})} \leqslant \max_{\Omega} \frac{|F(x)|}{D(x)}.$$

De aquí y de la condición $|y(x)| \leqslant \bar{y}(x)$ se deduce la afirmación del teorema.

TEOREMA 4. *Sea que la red Ω está dividida en dos subconjuntos Ω' y Ω'' que no son vacíos y no se intersecan, además Ω' es una red conexa. Si $F(x) \equiv 0$ en Ω' y en Ω' tenemos que $F(x) \neq 0$, $D(x) > 0$, en tal caso para la solución $y(x)$ del problema* (1) — (3) *es válida la acotación*

$$\max_{x \in \Omega} |y(x)| \leqslant \max_{x \in \Omega''} \frac{|F(x)|}{D(x)}. \tag{16}$$

DEMOSTRACION. Introduzcamos la función mayorante $\bar{y}(x)$, la cual es la solución de la misma ecuación (1), cuyo segundo miembro es $\bar{F}(x) = |F(x)| \geqslant 0$ ($S\bar{y} = 0$ en Ω', $S\bar{y} = \bar{F}(x)$ en Ω''). Puesto que $\Omega'' \neq \varnothing$ y $D(x) > 0$ en Ω'', a base del corolario 2 las funciones $y(x)$ e $\bar{y}(x)$ existen y son únicas. En virtud del corolario 1 $\bar{y}(x) \geqslant 0$ en Ω. a la vez de acuerdo con el teorema da comparación $y(x) \leqslant \bar{y}(x)$ en Ω.

Acotemos $\bar{y}(x)$. De las ecuaciones para $\bar{y}(x)$ se deduce que bien $\bar{y}(x) = \text{const} > 0$ en $\bar{\Omega}'$, bien (en virtud del principio de máximo) $y(x)$ no puede tomar su valor máximo en Ω'. En el segundo caso

$$\max_{\Omega'} \bar{y}(x) \leqslant \max_{\Omega''} \bar{y}(x). \tag{17}$$

Dado que Ω' y Ω'' son conjuntos no vacíos y Ω' y Ω son redes conexas, entonces $\bar{\Omega}' \cap \Omega'' \neq \varnothing$, de donde se desprende que la desigualdad (17) tiene lugar también en el primer caso.

Acotemos el segundo miembro de la correlación (17). Sea que $\max \overline{y}(x)$ se alcanza en el nodo $x_0 \in \Omega''$. Entonces, en este nodo tenemos

$$\overline{F}(x_0) = D(x_0)\,\overline{y}(x_0) + \sum_{\xi \in M'(x_0)} B(x_0, \xi)\,(\overline{y}(x_0) - \overline{y}(\xi)) \geqslant D(x_0)\,\overline{y}(x_0),$$

ya que $\overline{y}(x_0) \geqslant \overline{y}(\xi)$. De aquí se deduce que

$$\max_{\Omega} \overline{y}(x) = \overline{y}(x_0) \leqslant \overline{F}(x_0)/D(x_0),$$

$$\max_{\Omega} |y(x)| \leqslant \max_{\Omega''} (|F(x)|/D(x)),$$

que se trataba de demostrar.

§ 4. Acotaciones apriorísticas y acotaciones de la velocidad de convergencia del problema en diferencias de Dirichlet para la ecuación de Poisson

En el presente párrafo el principio de máximo se emplea para obtener acotaciones apriorísticas de la solución de los esquemas en diferencias, estudiados en el § 2, y las acotaciones de la velocidad de convergencia de dichos esquemas.

1. Acotaciones apriorísticas para el primer problema de contorno. Examinemos el primer problema de contorno de tipo común:

$$Sy(x) = F(x) \quad \text{para } x \in \omega, \qquad y(x) = g(x) \quad \text{para } x \in \gamma, \tag{1}$$

donde 1103

$$Sy(x) = A(x)\,y(x) - \sum_{\xi \in M'(x)} B(x, \xi)\,y(\xi), \tag{2}$$

y

$$A(x) > 0, \; B(x, \xi) > 0, \; D(x) = A(x) - \sum_{\xi \in M'(x)} B(x, \xi) \geqslant 0. \tag{3}$$

TEOREMA 1. *Sea* $\omega = \mathring{\omega} \cup \overset{*}{\omega}$, *donde* $\mathring{\omega}$ *es una red conexa y* $D(x) \geqslant 0$ *en* $\mathring{\omega}$, $D(x) > 0$ *en* $\overset{*}{\omega}$. *Entonces, la solución del problema* (1), (2) *existe, es única y para ésta es justa la siguiente acotación:*

$$\max_{\overline{\omega}} |y(x)| \leqslant \max_{\gamma} |g(x)| + \max_{\overline{\omega}} |U(x)| + \max_{\overset{*}{\omega}} \left| \frac{F(x)}{D(x)} \right|, \tag{4}$$

donde $U(x)$ *es la función mayorante que es la solución del problema*

$$\left. \begin{aligned} &SU(x) = \overline{F}(x), \quad x \in \omega, \quad U(x) \geqslant 0, \quad x \in \gamma, \\ &\overline{F}(x) \geqslant |F(x)| \quad \text{para} \quad x \in \mathring{\omega} \quad y \quad \overline{F}(x) \geqslant 0 \quad \text{para} \quad x \in \overset{*}{\omega}. \end{aligned} \right\} \tag{5}$$

DEMOSTRACION 1. El problema homogéneo $Sy = 0$ para $x \in \omega$, $y(x) = 0$ para $x \in \gamma$, en virtud del principio de máximo tiene sólo una solución trivial (véase el corolario 2). Por eso el problema (1), (2) tiene la solución única.

2. Representemos la solución del problema (1) en forma de la suma de los tres sumandos $y(x) = \overset{1}{y}(x) + \overset{2}{y}(x) + \overset{3}{y}(x)$, donde $\overset{i}{y}(x)$, $i = 1, 2, 3$, se determinan a base de las condiciones:

$$S\overset{1}{y}=0,\ x\in\omega,\quad \overset{1}{y}(x)=g(x)\quad \text{para}\quad x\in\gamma,$$
$$S\overset{2}{y}=F(x),\quad x\in\overset{\circ}{\omega},\quad S\overset{2}{y}=0,\quad x\in\overset{*}{\omega},\quad \text{e}\quad \overset{2}{y}=0\quad \text{para}\quad x\in\gamma,$$
$$S\overset{3}{y}=0,\ x\in\overset{\circ}{\omega},\quad S\overset{3}{y}=F(x),\ x\in\overset{*}{\omega}\quad \text{e}\quad \overset{3}{y}=0\quad \text{para}\quad x\in\gamma.$$

De acuerdo con el corolario 3 del § 3 tenemos

$$\max_{x\in\overline{\omega}}|\overset{1}{y}(x)|\leqslant\max_{x\in\gamma}|g(x)| \tag{6}$$

Acotemos la función $\overset{2}{y}(x)$ con auxilio de la función mayorante $U(x)$, determinable por las condiciones (5). En virtud del teorema 2 del § 3 tenemos

$$|\overset{2}{y}(x)|\leqslant|U(x)|\quad y\quad \max_{x\in\overline{\omega}}|\overset{2}{y}(x)|\leqslant\max_{x\in\overline{\omega}}|U(x)|. \tag{7}$$

Como $\overset{\circ}{\omega}$ es un recinto conexo y $D(x) > 0$ para $x \in \overset{*}{\omega}$, entonces se puede aplicar el teorema 4 del § 3 para apreciar $\overset{3}{y}(x)$

$$\max_{x\in\omega}|\overset{3}{y}(x)|\leqslant\max_{x\in\overset{*}{\omega}}\left|\frac{F(x)}{D(x)}\right|. \tag{8}$$

3. Tomando en consideración la desigualdad $|y(x)| \leqslant |\overset{1}{y}(x)| + |\overset{2}{y}(x)| + |\overset{3}{y}(x)|$ y haciendo uso de las acotaciones (6), (7) y (8), obtenemos la desigualdad (4).

Partiendo de la (4) se comprende que la construcción de una función mayorante es un problema independiente. En el p. 3 la función $U(x)$ se va a construir para la ecuación de Poisson.

2. Anotación del problema en diferencias de Dirichlet para la ecuación de Poisson en forma canónica. Para hacer uso del teorema anterior es necesario escribir en la forma (1) las ecuaciones en diferencias para el problema de Dirichlet.

En el § 2 en el caso de un recinto de tipo general el problema en diferencias de Dirichlet se formulaba así:

$$\left.\begin{aligned} \Lambda y = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} &= -f(x), \quad \text{siendo} \quad x \in \dot{\omega}, \\ \Lambda^* y = \Lambda_1^* y + \Lambda_2^* y &= -f(x), \quad \text{siendo} \quad x \in \overset{*}{\omega}, \\ y &= g(x), \quad \text{siendo} \quad x \in \gamma, \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

donde $\Lambda_\alpha^* y$ se determina según la fórmula (20) del § 2:

$$\Lambda_\alpha^* y = \begin{cases} \dfrac{1}{\hbar_\alpha}\left(\dfrac{y^{(+1_\alpha)} - y}{h_\alpha} - \dfrac{y - y^{(-1_\alpha)}}{h_\alpha^*}\right), x^{(-1_\alpha)} \in \gamma, \\ \dfrac{1}{\hbar_\alpha}\left(\dfrac{y^{(+1_\alpha)} - y}{h_\alpha^*} - \dfrac{y - y^{(-1_\alpha)}}{h_\alpha}\right), x^{(+1_\alpha)} \in \gamma, \end{cases}$$

donde h_α^* es la distancia de $x \in \omega$ a $x^{(+1_\alpha)}$ ó a $x^{(-1_\alpha)}$.

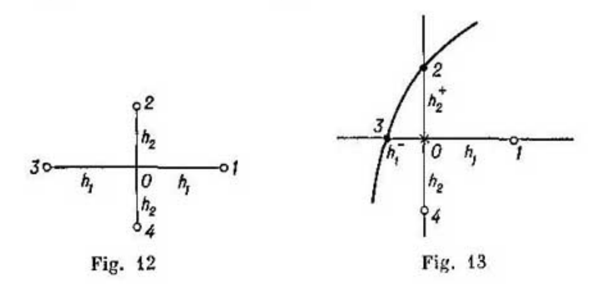


Fig. 12 Fig. 13

Además, se analizaba también otro esquema:

$$\begin{aligned} \Lambda y = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} &= -f(x), \quad x \in \dot{\omega}, \\ \Lambda^* y = \Lambda_1^* y + \Lambda_2^* y &= -f(x), \quad x \in \overset{*}{\omega}, \qquad (10) \\ y(x) &= g(x), \quad x \in \gamma, \end{aligned}$$

$$\Lambda_\alpha^* y = \frac{1}{\hbar_\alpha}(y_{x_\alpha} - y_{\bar{x}_\alpha}) = y_{\bar{x}_\alpha \hat{x}_\alpha}, \quad \hbar_\alpha = 0{,}5\,(h_\alpha + h_\alpha^*).$$

Escribamos la ecuación $\Lambda y = -f$ en los nodos regulares $x \in \dot{\omega}$ del modo siguiente (fig. 12):

$$\left(2\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}\right) y(x) = \frac{1}{h_1^2}(y^{(+1_1)} + y^{(-1_1)}) + \\ + \frac{1}{h_2^2}(y^{(+1_2)} + y^{(-1_2)}) + f(x), \quad x \in \dot{\omega}. \qquad (11)$$

En los nodos irregulares $x \in \overset{*}{\omega}$ para el esquema (9) tenemos (fig. 13):

$$\left(\frac{h_1+h_1^*}{h_1^2 h_1^*}+\frac{h_2+h_2^*}{h_2^2 h_2^*}\right) y(x)=$$
$$=\frac{1}{h_1^2} y^{(+1_1)}+\frac{1}{h_2^2} y^{(-1_2)}+f(x)+\frac{1}{h_1 h_1^*} g^{(-1_1)}+\frac{1}{h_2 h_2^*} g^{(+1_2)}, \qquad (12)$$
$$\text{si } x^{-1_1} \in \gamma \text{ y } x^{+1_2} \in \gamma.$$

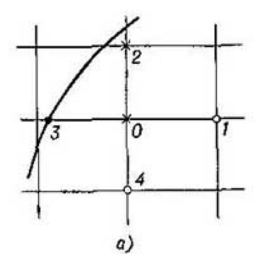
Por ejemplo, si $x^{(-1_1)} \in \gamma$ y $x^{(+1_2)} \notin \gamma$, entonces en vez de (12) tenemos (fig. 14, *a*)

$$\left(\frac{h_1+h_1^*}{h_1^2 h_1^*}+\frac{2}{h_2^2}\right) y(x)=$$
$$=\frac{1}{h_1^2} y^{(+1_1)}+\frac{1}{h_2^2}\left(y^{(+1_2)}+y^{(-1_2)}\right)+f(x)+\frac{1}{h_2 h_2^*} g^{(+1_2)}.$$

De aquí $A(x)>0$, $B(x, \xi)>0$ y $D(x)=\frac{1}{h_1 h_1^*}+\frac{1}{h_2 h_2^*}$,

$$\text{siendo } x^{(-1_1)} \in \gamma,\ x^{(+1_2)} \in \gamma,\ D(x)=\frac{1}{h_1 h_1^*}\ x^{(-1_1)} \in \gamma.$$

Para $D(x)$ se obtienen expresiones análogas también en otros casos en los cuales $x^{(-1_1)} \in \gamma$, $x^{(+1_2)} \in \gamma$ (fig. 14, *b*), etc., así como al exa-



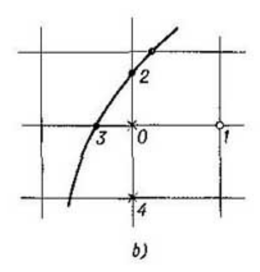


Fig. 14

minar el esquema (10). No cuesta trabajo notar que en todos los casos para $D(x)$ es justa la acotación:

$$D(x) \geqslant 1/h^2, \text{ donde } h=\max(h_1, h_2), \text{ siendo } x \in \overset{*}{\omega}. \qquad (13)$$

Si $x \in \omega$ y todos los nodos $\xi \in M'(x)$ son interiores, entonces $D(x) = 0$. Pero, si $x \in \omega$ es un nodo interior regular, no obstante por lo menos uno de los nodos vecinos de éste se encuentra en la frontera, es decir, $x^{(\pm 1_1)} \in \gamma$ ó $x^{(\pm 1_2)} \in \gamma$, entonces $D(x)>0$. De esta manera,

$$D(x) \geqslant 0, \quad \text{siendo} \quad x \in \overset{\bullet}{\omega}. \qquad (14)$$

3. Acotación del error de un problema. Función mayorante. Sea $y = y(x)$ la solución del problema (9) ó (10) y $u = u(x)$ es la solución del problema inicial (1) del § 2. Designemos mediante $z(x) = y - u$ el error de la solución. Haciendo $y = z + u$ en (9), obtenemos para z las siguientes condiciones:

$$\Lambda z = -\psi(x),\ x \in \overset{\circ}{\omega},\ \Lambda^* z = -\psi^*(x),\ x \in \overset{*}{\omega},\ z = 0,\ x \in \gamma. \quad (15)$$

Este problema se puede escribir en la forma

$$Sz = \psi,\ \text{siendo}\ x \in \overset{\circ}{\omega},\ Sz = \psi^*,\ \text{siendo}\ x \in \overset{*}{\omega},\ z = 0,\ \text{siendo}\ x \in \gamma. \quad (15')$$

Construyamos la función mayorante $U(x)$ para el problema

$$\left.\begin{array}{l} S\overset{2}{z} = \psi, \quad \text{siendo} \quad x \in \overset{\circ}{\omega}, \quad S\overset{2}{z} = 0, \quad \text{siendo} \quad x \in \overset{*}{\omega}, \\ \overset{2}{z} = 0, \quad \text{siendo} \quad x \in \gamma. \end{array}\right\} \quad (16)$$

Sea que el origen de coordenadas (0, 0) se encuentra dentro del recinto G y R es el radio del círculo mínimo, que contiene el recinto G, de centro en el origen de coordenadas. Supongamos que

$$U(x) = \frac{K}{4}(R^2 - x_1^2 - x_2^2), \quad (17)$$

donde K es una constante positiva, la cual escogeremos más tarde. Si $x = (x_1, x_2) \in G$, entonces $U(x) \geqslant 0$. Como $(x_\alpha + h_\alpha)^2 - x_\alpha^2 = 2(x_\alpha + 0{,}5h_\alpha)h_\alpha$, por eso $(x_1^2)_{\bar{x}_1 x_1} = 2$, $(x_1^2)_{\bar{x}_2 x_2} = 0$ y $(\Lambda_1 + \Lambda_2) \times (x_1^2 + x_2^2) = 4$, es decir, $\Lambda U = -K$, siendo $x \in \overset{\circ}{\omega}$.

En los nodos irregulares $x \in \overset{*}{\omega}$ para el esquema (9) tenemos

$$\Lambda^* U = -K\left(\frac{h_1 + h_1^*}{4h_1} + \frac{h_2 + h_2^*}{4h_2}\right) = -\varkappa K,\ \varkappa > \frac{1}{2},$$
$$\text{siendo } x^{(-1_1)},\ x^{(+1_2)} \in \gamma$$

ó $x^{(+1_1)}$, $x^{(-1_2)} \in \gamma$, etc. Empero, si solamente $x^{(-1_1)} \in \gamma$, en tal caso

$$\Lambda^* U = -K\left(\frac{h_1 + h_1^*}{4h_1} + \frac{1}{2}\right), \quad \varkappa = \frac{h_1 + h_1^*}{4h_1} + \frac{1}{2} > \frac{3}{4}.$$

De esta forma, $\Lambda^* U = -\varkappa K$, $\varkappa > \frac{1}{2}$, siendo $x \in \overset{*}{\omega}$. Comparando las ecuaciones

$$SU = K,\ x \in \overset{\circ}{\omega};\ SU = \varkappa K,\ \varkappa > \frac{1}{2},\ x \in \overset{*}{\omega};\ U(x) \geqslant 0,\ x \in \gamma$$

con las ecuaciones (16), vemos que

$$U(x) \geqslant |\overset{2}{z}(x)|,$$

suponiendo, por ejemplo, que $K = \max\limits_{x \in \overset{\circ}{\omega}} |\psi(x)|$.

De esta manera, tenemos

$$0 \leqslant U(x) \leqslant \frac{R^2}{4} K = \frac{R^2}{4} \max_{x \in \overset{\bullet}{\omega}} |\psi(x)|.$$

Teniendo en cuenta que $D(x) \geqslant 0$ para $x \in \overset{\bullet}{\omega}$ y $D(x) \geqslant 1/h^2$ para $x \in \overset{*}{\omega}$, y valiéndonos del teorema 1, para la resolución del problema (15) obtenemos la acotación

$$\max_{\omega} |z(x)| = \max_{\omega} |y(x) - u(x)| \leqslant \frac{R^2}{4} \max_{\overset{\bullet}{\omega}} |\psi(x)| + h^2 \max_{\overset{*}{\omega}} |\psi^*(x)|. \tag{18}$$

De aquí se deduce el

TEOREMA 2. *Si la solución del problema* (1), (2) *del* § 2 *es* $u(x) \in C^4(\overline{G})$, *las soluciones de los problemas en diferencias* (9) *y* (10) *convergen uniformemente con la velocidad* $O(|h^2|)$:

$$\max_{x \in \omega} |y(x) - u(x)| \leqslant M \cdot |h|^2,$$

donde $M = \text{const} > 0$ *no depende de* h_1, h_2, $|h|^2 = h_1^2 + h_2^2$.

4. Esquemas de orden elevado de precisión. Examinemos el esquema (8), (9) del § 2 con el error $O(|h|^4)$. Está definido sobre el modelo de nueve puntos tipo «caja», representado en la fig. 15, y tiene la forma

$$\Lambda' y = (\Lambda_1 + \Lambda_2) y + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \Lambda_1 \Lambda_2 y = -\varphi(x), \quad x \in \omega,$$

$$y = g(x), \quad \text{siendo} \quad x \in \gamma, \ \varphi(x) = f + \frac{1}{12}(h_1^2 \Lambda_1 f + h_2^2 \Lambda_2 f), \tag{19}$$

donde ω es una red en el rectángulo $\{0 \leqslant x_\alpha \leqslant l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$, $\Lambda_\alpha y = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}$, $\alpha = 1, 2$ (en este caso todos los nodos son regulares).

Escribamos la ecuación $\Lambda' y = -\varphi$ en la forma canónica $Sy = \varphi(x)$, donde $Sy = -\Lambda' y$. Sustituyendo $\Lambda_1 y$ y $\Lambda_2 y$ por sus expresiones, obtendremos (véase la fig. 15) *)

$$\frac{5}{3}\left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}\right) y(0) = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{h_1^2} - \frac{1}{h_2^2}\right)(y(1) + y(3)) +$$
$$+ \frac{1}{6}\left(\frac{5}{h_2^2} - \frac{1}{h_1^2}\right)(y(2) + y(4)) +$$
$$+ \frac{1}{12}\left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}\right)(y(5) + y(6) + y(7) + y(8)).$$

*) Siendo $h_1 = \sqrt{5}\, h_2$ y $h_2 = \sqrt{5} h_1$ el modelo contiene sólo siete nodos.

Comparando con el (1), vemos que

$$A(x)=\frac{5}{3}\left(\frac{1}{h_1^2}+\frac{1}{h_2^2}\right)>0;$$

$$B(x,\xi)=\frac{1}{6}\left(\frac{5}{h_1^2}-\frac{1}{h_2^2}\right)\geqslant 0,\quad \xi=1,\ 3;$$

$$B(x,\xi)=\frac{1}{6}\left(\frac{5}{h_2^2}-\frac{1}{h_1^2}\right)\geqslant 0,\quad \xi=2,\ 4;$$

$$B(x,\xi)=\frac{1}{12}\left(\frac{1}{h_1^2}+\frac{1}{h_2^2}\right)>0,\quad \xi=5,\ 6,\ 7,\ 8;$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\leqslant\frac{h_2}{h_1}\leqslant\sqrt{5}. \tag{20}$$

Con la condición (20) el principio de máximo es aplicable al esquema (19): es evidente que $D(x)\equiv 0$, siendo $x\in\omega$, y $D(x)=A(x)=1$, siendo $x\in\gamma$. La función mayorante $U(x)$ evidentemente se puede escoger del modo siguiente:

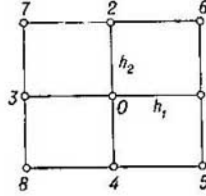


Fig. 15

$$U(x)=\frac{K}{4}\ (l_1^2+l_2^2-x_1^2-x_2^2)\quad 0\leqslant x_\alpha\leqslant l_\alpha,\quad \alpha=1,\ 2.$$

Como $\Lambda_1\Lambda_2 U=0$, entonces $\Lambda' U=\Lambda U=-K$. Por eso se puede suponer $K=\max\limits_{\omega}|\psi(x)|$. Debido a que el recinto G es un rectángulo y la red $\bar{\omega}$ es uniforme según x_1 y x_2, todos los nodos interiores son regulares. Para $U(x)$ tiene lugar la acotación

$$0\leqslant U(x)\leqslant\frac{l_1^2+l_2^2}{4}\max_{\omega}|\psi(x)|.$$

En definitiva nos convencemos de que para el errpr $z(x)=y(x)-u(x)$ del esquema (19) se verifica la acotación

$$\max_{\omega}|y(x)-u(x)|\leqslant\frac{l_1^2+l_2^2}{4}\max_{\omega}|\psi(x)|. \tag{21}$$

Si la solución del problema inicial $u(x)\in C^{(6)}(\bar{G})$, con la condición (20) el esquema (19) converge uniformemente con la velocidad $O(|h|^4)$ (tiene el cuarto orden de precisión).

Sobre una red cuadrada $h_1=h_2=h$ la condición (20) se cumple automáticamente. Por eso se puede hacer uso de la acotación (21) para el esquema (8), (9) del § 1, el que difiere del (19) sólo por la expresión para $\varphi(x)$. De la (21) se desprende que el esquema converge uniformemente con la velocidad $O(h^6)$ (tiene el sexto orden de precisión), si $u(x)\in C^{(8)}(\bar{G})$.

5. Esquemas para la ecuación en coordenadas polares y cilíndricas. Dirijámonos ahora al problema (13) del § 2.

$$\left.\begin{aligned} &\overline{\Lambda}_r \check{y} + \Lambda_\varphi y = -f(r, \varphi), \ (r, \varphi) \in \omega, \\ &y(r, \varphi) = y(r, \varphi + 2\pi), \ (r, \varphi) \in \omega, \ y = g(\varphi), \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (r, \varphi) \in \gamma, \\ &\overline{\Lambda}_r y = \frac{1}{r}(\rho y_{\bar{r}})_r, \ \rho = r - 0{,}5h_r, \ \Lambda_\varphi y = \frac{1}{r^2} y_{\bar{\varphi}\varphi} \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

(la frontera γ consta de los nodos (R, φ_m).

El esquema (22) aproxima al problema de Dirichlet para la ecuación de Poisson en el círculo $0 \leqslant r \leqslant R$ de radio R:

$$\begin{gathered} \Delta_{r,\varphi} u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = -f(r, \varphi), \\ 0 < r < R, \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \\ r\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=0} = 0, \ u = g(\varphi), \quad \text{siendo} \quad r = R, \\ u(r, \varphi) = u(r, \varphi + 2\pi) \quad (0 < r < R, \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi). \end{gathered} \tag{23}$$

Escribamos la ecuación (22) en la forma (1). Está claro que $x = (r_n, \varphi_m)$, el modelo $M(x) = \{(r_{n-1}, \varphi_m), (r_{n+1}, \varphi_m), (r_n, \varphi_{m-1}), (r_n, \varphi_{m+1}), (r_n, \varphi_m)\}$, siendo $r \neq 0{,}5h_r$ y $r \neq R$, $M(x) = \{(r_1, \varphi_m), (r_0, \varphi_{m-1}), (r_0, \varphi_{m+1}), (r_0, \varphi_m)\}$, para $r = 0{,}5h_r$.

La forma de $\overline{\Lambda}_r$ y Λ_φ nos permite concluir que para el problema (22) las condiciones (2) están cumplidas, además $D(x) = 0$ en todos los nodos interiores $x = (r_n, \varphi_m)$, $n < N$ $(r_n < R)$. La red consta únicamente de nodos interiores regulares. En cada uno de estos nodos para el error de aproximación del esquema (22) tiene lugar la acotación obtenida en el § 1

$$\psi = \overline{\Lambda}_r u + \Lambda_\varphi u + f(r, \varphi) = O\left(\frac{h_r^2 + h_\varphi^2}{r}\right), \tag{24}$$

si $u \in C^{(4)}(\overline{G})$.

Para acotar la solución del problema (22), siendo $y|_\gamma = 0$, construyamos la función mayorante

$$U(r, \varphi) = K(R - r), \quad K = \text{const} > 0.$$

Apliquemos para U el operador $\Lambda = \overline{\Lambda}_r + \Lambda_\varphi$. Teniendo presente que U no depende de φ y $\Lambda_\varphi U = 0$, así como

$$\frac{1}{r}(\rho U_{\bar{r}})_r = -\frac{K}{h_r r}((r + 0{,}5h_r) - (r - 0{,}5h_r)) = -\frac{K}{r},$$

obtenemos $\Lambda U = -\frac{K}{r}$, siendo $x = (r, \varphi) \in \omega$, $U(R, \varphi) = 0$. Exijamos que se cumpla la desigualdad $K \geqslant r\,|f(r, \varphi)|$ para todos

los $x = (r, \varphi) \in \omega$. Esto tendrá lugar al suponer $K = \max\limits_{\omega} | rf(r, \varphi) |$.

De aquí y del teorema 1 se deduce el

TEOREMA 3. *La solución del problema* (22) *existe y es única; para ésta es justa la acotación*

$$\max_{\overline{\omega}} |y(x)| \leqslant \max_{\omega_\varphi} |g(\varphi)| + R \max_{\omega} |rf(r, \varphi)|. \tag{25}$$

Si la solución de la ecuación diferencial $u(r, \varphi)$ *tiene cuatro derivadas acotadas respecto a* x_1 y x_2, *el esquema* (22) *converge uniformemente con el segundo orden (o sea, tiene el segundo orden de exactitud).*

DEMOSTRACION. 1. Las condiciones del teorema 1 están cumplidas. Por eso se puede hacer uso de la acotación (4) y sustituir en la misma

$$\max_{\omega} | U | \leqslant KR = R \max_{\omega} | rf(r, \varphi) |.$$

2. Para el error $z = y - u$ tenemos el problema

$$\overline{\Lambda}_r z + \Lambda_\varphi z = -\psi, \ (r, \varphi) \in \omega, \ z = 0, \ \text{cuando} \ r = R \tag{26}$$

con la condición de frontera homogénea. En virtud de la acotación apriorística (25)

$$\max_{\omega} z(r, \varphi) \leqslant R \max_{\omega} | r\psi(r, \varphi) |. \tag{27}$$

Sustituyendo aquí la acotación (24) ó $| r\psi | = O(h_r^2 + h_\varphi^2)$, obtenemos $\max | z | \leqslant M(h_r^2 + h_\varphi^2)$, donde $M = \text{const} > 0$ no depende de h_r y h_φ. El teorema se ha demostrado.

Sea que en un cilindro circular (véanse los §§ 1 y 2)

$$\overline{G} = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 \leqslant R^2, \ 0 \leqslant x_3 = z \leqslant l\}$$

se pide hallar la solución de la ecuación de Poisson, que toma en la superficie del cilindro los valores dados. En coordenadas cilíndricas el problema se plantea del modo siguiente: hallar la solución acotada en $\overline{G}$ de la ecuación

$$\Delta_{r, \varphi, z} u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -f(r, \varphi, z), \tag{28}$$

que verifique la condición de periodicidad respecto a φ y la condición de contorno $u(r, \varphi, z) = g(r, \varphi, z)$, siendo $r = R$, $0 \leqslant z \leqslant l$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ y, siendo $z = 0$, l, $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Introduzcamos en el cilindro la red descrita en el § 1

$$\overline{\omega} = \overline{\omega}_r \times \omega_\varphi \times \overline{\omega}_z = \{(r, \varphi, z) | r \in \overline{\omega}_r, \ \varphi \in \omega_\varphi, \ z \in \overline{\omega}_z\},$$
$$\overline{\omega}_r = \{r_n = (n + 0{,}5) h_r, \ n = 0, 1, 2, \ldots, N, \ h_r = R/(N + 0{,}5)\},$$
$$\overline{\omega}_\varphi = \{\varphi_m = mh_\varphi, \ m = 0, 1, 2, \ldots, M - 1, \ h_\varphi = 2\pi/M\},$$
$$\overline{\omega}_z = \{z_k = kh_z, \ k = 0, 1, 2, \ldots, I, \ h_z = l/I\}.$$

La frontera γ consta de los nodos (R, φ_m, z_k), $(r_n, \varphi_m, 0)$ y (r_n, φ_m, l). El conjunto de los nodos interiores $\omega = \overline{\omega} \setminus \gamma$. Todos los nodos son regulares, es decir, $\overset{\circ}{\omega} = \omega$. Sobre la red $\overline{\omega} = \Omega$ el esquema en diferencias para el problema (28) tiene la forma

$$\overline{\Lambda} y = \overline{\Lambda}_r y + \Lambda_\varphi y + \Lambda_z y = -f(r, \varphi, z), \qquad x = (r, \varphi, z) \in \omega, \quad (29)$$

$$y = g(r, \varphi, z), \quad \text{siendo} \quad x \in \gamma,$$

donde $\Lambda_z y = y_{\bar{z}z}$, $(\overline{\Lambda}_r + \Lambda_\varphi)$ es el operador del problema (22). Escribiendo (29) en la forma canónica (1), nos convencemos de que todas las condiciones (2) están cumplidas, además $\overline{\omega} = \Omega$, a la vez $D(x) \equiv 0$, siendo $x \in \omega$. Para hacer uso del teorema 1 es suficiente construir la función mayorante $U = U(r, \varphi, z)$.

Es fácil notar que la función $U = K(R - r)$ puede ser mayorante también para el problema (29) con las condiciones de frontera homogéneas. Por lo tanto el teorema 3 también queda válido para el problema en diferencias de Dirichlet en un cilindro (29). En este caso el error de aproximación $\psi = \left(\frac{1}{r}(h_r^2 + h_\varphi^2) + h_z^2\right)$, y para el error $z = y - u$ es justa la acotación

$$\max_{\omega} |y - u| \leqslant M(h_r^2 + h_\varphi^2 + h_z^2),$$

donde $M = \text{const} > 0$ no depende de los pasos de la red. De esta forma, el esquema (29) tiene el segundo orden de exactitud.

6. Problema en diferencias de Dirichlet para la ecuación de Poisson en coordenadas esféricas. Sea que en una esfera $\overline{G} = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leqslant R^2\}$ se pide hallar la solución de la ecuación de Poisson, la cual toma en la superficie de la esfera los valores dados. En coordenadas esféricas el problema se plantea del modo siguiente: hallar la solución continua en $\overline{G}$ de la ecuación

$$\Delta_{r,\varphi,\theta} u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) =$$

$$= -f(r, \varphi, \theta), \text{ siendo } 0 < r < R,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad (30)$$

que verifica la condición de frontera

$$u(r, \varphi, \theta) = g(\varphi, \theta), \quad \text{siendo} \quad r = R, \qquad (30')$$

las condiciones de acotación

$$r^2 \frac{\partial u}{\partial r} = 0, \quad \text{siendo } r = 0; \quad \operatorname{sen}\theta \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0, \quad \text{siendo} \quad \theta = 0,\ \pi \quad (30'')$$

y la condición de periodicidad respecto a φ

$$u(r, \varphi, \theta) = u(r, \varphi + 2\pi, \theta), \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi. \qquad (30''')$$

El esquema en diferencias para este problema se ha obtenido en los §§ 1, 2. Se introduce la red

$$\bar{\omega}=\bar{\omega}_r\times\omega_\varphi\times\omega_\theta=\{(r,\ \varphi,\ \theta)|r\in\bar{\omega}_r,\ \varphi\in\omega_\varphi,\ \theta\in\omega_\theta\},$$

donde ω_φ están definidas anteriormente y

$\bar{\omega}_r=\{r_n=(n+1)\,h_r,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1,\ h_r=R/N\}$,

$\bar{\omega}_\theta=\{\theta_i=(i+0{,}5)\,h_\theta,\ i=0,\ 1,\ \ldots,\ I-1,\ h_\theta=\pi/I\}$.

La frontera γ de la red consta de los nodos $(R,\ \varphi_m,\ \theta_i)$

$$\gamma=\{(R,\ \varphi_m,\ \theta_i)\mid(\varphi_m,\ \theta_i)\in\omega_\varphi\times\omega_\theta\}.$$

El conjunto de los nodos interiores

$\omega=\bar{\omega}\diagdown\gamma=\{(r,\varphi,\theta)\ r<R_1\ (\varphi,\theta)\in\omega_\varphi\times\omega_\theta\}$.

Sobre la red $\bar{\bar{\omega}}=\Omega$ el esquema en diferencias para el problema (30) se escribe así:

$$\left.\begin{aligned}&\bar{\Lambda}y=\bar{\Lambda}_ry+\Lambda_\varphi y+\bar{\Lambda}_\theta y=-f(r,\ \varphi,\ \theta),\ x=(r,\ \varphi,\ \theta)\in\omega,\\&y=g(\varphi,\ \theta),\ \text{siendo}\ r=R,\ y(r,\ \varphi,\ \theta)=y(r,\ \varphi+2\pi,\ \theta),\end{aligned}\right\}\quad(31)$$

donde $\bar{\Lambda}=\bar{\Lambda}_r+\Lambda_\varphi+\bar{\Lambda}_\theta$ se determina a base de las fórmulas (39) — (41) del § 1. Volvamos a escribirlas:

$$\bar{\Lambda}_ry=\frac{1}{r^2}(\rho y_{\bar{r}})_r\quad\rho=r(r-h_r),\quad r=(n+1)\,h_r,\quad n=0,\ 1,\ \ldots,\ N-1,$$

$$\Lambda_\varphi y=\frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\,y_{\bar{\varphi}\varphi},\quad\bar{\Lambda}_\theta y=\frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}(\operatorname{sen}\bar{\theta}y_{\bar{\theta}})_\theta,\quad\bar{\theta}_i=\theta_i-\frac{1}{2}h_\theta=ih_\theta,$$

de suerte que $\rho_n=0$, siendo $n=0$; $\bar{\theta}_i=0$, siendo $i=0$, y $\bar{\theta}_i=\pi$, siendo $i=I$.

Escribiendo el esquema (31) en forma canónica (1), siendo $\Omega=\bar{\omega}$, vemos que las condiciones (2) se cumplen para éste y $D\ (x)\equiv0$ para todos los $x=(r_n,\ \varphi_m,\ \theta_i)\in\omega$. Para el problema (31) con las condiciones de frontera homogéneas $y=0$, siendo $r=R$, construyamos la función mayorante

$$U\ (r,\ \varphi,\ \theta)=K\ (R-r\operatorname{sen}\theta),\qquad(32)$$

donde $K=\text{const}>0$.

Calculemos $(\bar{\Lambda}_r+\Lambda_\varphi+\bar{\Lambda}_\theta)\,U=\bar{\Lambda}_rU+\bar{\Lambda}_\theta U$.

Señalando que

$$\bar{\Lambda}_rr=\frac{1}{r^2}(\rho r_{\bar{r}})_r=\frac{1}{r^2h_r}(\rho^{(+1_r)}-\rho)=\frac{1}{r^2h_r}(r\,(r+h_r)-r\,(r-h_r))=\frac{2}{r},$$

$$(\operatorname{sen}\bar{\theta}\,(\operatorname{sen}\theta)_{\bar{\theta}})_{\theta,\ i}=\frac{1}{h_\theta^2}(\operatorname{sen}\theta_{i+0,5}\,(\operatorname{sen}\theta_{i+1}-\operatorname{sen}\theta_i)-$$

$$-\operatorname{sen}\theta_{i-0,5}\,(\operatorname{sen}\theta_i-\operatorname{sen}\theta_{i-1}))=\frac{1}{h_\theta^2}\operatorname{sen}\frac{h_\theta}{2}(\operatorname{sen}2\theta_{i+0,5}-\operatorname{sen}2\theta_{i-0,5})=$$

$$=\frac{2}{h_\theta^2}\operatorname{sen}\frac{h_\theta}{2}\operatorname{sen}h_\theta\cos2\theta_i,$$

hallamos

$$\bar{\Lambda}U = -\bar{F}, \quad x \in \omega; \; U = KR(1-\operatorname{sen}\theta) \geqslant 0, \quad x \in \gamma, \qquad (33)$$

donde

$$\bar{F} = \frac{K}{r \operatorname{sen}\theta}(2\operatorname{sen}^2\theta + \varkappa\cos 2\theta) > 0, \quad \varkappa = \frac{\operatorname{sen} h_\theta}{h_\theta} \cdot \frac{\operatorname{sen} 0{,}5h_\theta}{0{,}5h_\theta}.$$

Puesto que la función $\varphi(\alpha) = (\operatorname{sen}\alpha)/\alpha$, siendo $0 < \alpha < \pi/2$, es monótona decreciente, entonces para $\varkappa$ son válidas las acotaciones bilaterales $4\sqrt{2}/\pi^2 \leqslant \varkappa < 1$ para cualesquiera que sean $h_\theta \leqslant \pi/2$. La función U, en virtud del teorema de comparación del § 3, es mayorante para la solución del problema (31) con la condición homogénea $y = 0$, siendo $x = (R, \varphi, \theta) \in \gamma$, si $\bar{F}(x) \geqslant |f(x)|$. Esta desigualdad se verificará, siendo $r \operatorname{sen}\theta \bar{F}(x) = K(2\operatorname{sen}^2\theta + \varkappa(1 - 2\operatorname{sen}^2\theta)) \geqslant \varkappa K > r \operatorname{sen}\theta\, |f(x)|$.

Para ello es suficiente suponer

$$\varkappa K = \max_{\omega} |r \operatorname{sen}\theta f(r, \varphi, \theta)|.$$

De aquí hallamos la condición para K:

$$K = \frac{1}{\varkappa}\max_{\omega}|r\operatorname{sen}\theta f(r, \varphi, \theta)| \leqslant \frac{\pi^2}{4\sqrt{2}}\max_{\omega}|r\operatorname{sen}\theta f(r, \varphi, \theta)|.$$

Para $U(x)$ es válida la acotación

$$U(x) = U(r, \varphi, \theta) \leqslant KR < 2R\max_{\omega}|r\operatorname{sen}\theta f(r, \varphi, \theta)|.$$

Aplicando el teorema 1 al problema (31), nos convencemos de que:

1) el problema (31) tiene la solución única; para ésta es justa la acotación apriorística

$$\max_{\omega}|y(r, \varphi, \theta)| \leqslant \max_{\omega_\varphi \times \omega_\theta}|g(\varphi, \theta)| + 2R\max_{\omega}|r\operatorname{sen}\theta f(r, \varphi, \theta)|, \qquad (34)$$

2) el esquema (31) tiene el segundo orden de exactitud en caso de que la solución u del problema (30) como función de las variables cartesianas x_1, x_2, x_3 tiene en el $\bar{G}$ las cuartas derivadas acotadas:

$$\max_{\omega}|y(r, \varphi, \theta) - u(r, \varphi, \theta)| \leqslant M(h_r^2 + h_\varphi^2 + h_\theta^2),$$

donde $M = \text{const} > 0$ no depende de h_r, h_φ y h_θ.

La primera afirmación se desprende directamente del teorema 1. Para apreciar el orden de exactitud analizamos el problema para el error

$$\bar{\Lambda}z = \bar{\Lambda}_r z + \Lambda_\varphi z + \bar{\Lambda}_\theta z = -\psi(r, \varphi, \theta), \quad x = (r, \varphi, \theta) \in \omega,$$
$$z = 0, \text{ siendo } x \in \gamma.$$

El error de aproximación ψ se ha investigado en el § 1; para éste es justa la acotación

$$\psi(r,\ \varphi,\ \theta)=O\left(\frac{h_r^2}{r}+\frac{h_\varphi^2+h_\theta^2}{r\operatorname{sen}\theta}\right). \tag{35}$$

Valiéndonos de la acotación (34), tenemos

$$\max_{\omega}|y-u|\leqslant 2R\max_{\omega}|r\operatorname{sen}\theta\cdot\psi(r,\ \varphi,\ \theta)|, \tag{36}$$

y, por consiguiente,

$$\max_{\omega}|y(r,\ \varphi,\ \theta)-u(r,\ \varphi,\ \theta)|=O(h_r^2+h_\varphi^2+h_\theta^2).$$

CAPÍTULO IV

ESQUEMAS EN DIFERENCIAS PARA LOS PROBLEMAS DE CONTORNO FUNDAMENTALES DE LA FÍSICA MATEMÁTICA

En este capítulo se forman las aproximaciones de red de los problemas de contorno más características para las ecuaciones principales de la Física Matemática. Se analizan los planteamientos de los problemas de contorno para las ecuaciones de segundo orden, para el sistema de ecuaciones de Lamé y para la ecuación biarmónica.

§ 1. Problemas de contorno para las ecuaciones de segundo orden

En el presente párrafo aportaremos los planteamientos de problemas de contorno fundamentales para las ecuaciones diferenciales de segundo orden e indicaremos algunas especies de las condiciones de conjugación.

1. Ecuaciones de segundo orden. Como ya se ha señalado más de una vez, la ecuación elíptica elemental de segundo orden es la ecuación de Laplace $\Delta u = 0$, la cual en el caso bidimensional tiene el aspecto

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0. \qquad (1)$$

En el § 1 del capítulo I fue mostrado que la ecuación de Laplace describe, por ejemplo, la ley de distribución estacionaria de la temperatura en el medio isótropo homogéneo el cual no contiene fuentes interiores, la difusión establecida y una serie de otros procesos físicos.

Si el medio contiene manantiales interiores, los procesos mencionados se describen mediante la ecuación de Poisson

$$\Delta u = -f(x), \quad x = (x_1, x_2, x_3),$$

donde la función $f(x)$ es la densidad de distribución de las fuentes.

Si la densidad de distribución de las fuentes no depende de la variable x_3, en una serie de los casos, como se ha señalado en el § 1

del capítulo I, la solución incógnita tampoco depende de x_3, y entonces la ecuación de Poisson se puede escribir en la forma

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = -f(x), \qquad x = (x_1, x_2). \tag{2}$$

En lo sucesivo siempre procederemos suponiendo que la solución incógnita depende sólo de dos variables x_1 y x_2 y no depende de x_3, es decir, $u \equiv u(x_1, x_2)$. Esto quiere decir que el proceso que se describe transcurre dentro del cuerpo delimitado por una superficie cilíndrica cuya generatriz es paralela al eje Ox_3. Con esto podemos considerar que el problema se examina en un recinto formado por la sección de dicho cilindro por el plano $x_3 = \text{const}$.

Para describir los procesos que tienen lugar en el medio no homogéneo, se requieren las ecuaciones diferentes a la ecuación (2). Así, por ejemplo, la distribución de la temperatura en un medio cuyo coeficiente de conductibilidad térmica k cambia de un punto a otro, o sea, $k = k(x)$, se describirá empleando la ecuación

$$Lu \equiv \frac{\partial}{\partial x_1}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) = -f(x), \quad x = (x_1, x_2). \tag{3}$$

Además, si el proceso de distribución del calor depende de la dirección, es decir, el medio es anisótropo, entonces, con una elección adecuada de las variables independientes la ecuación toma la forma

$$Lu \equiv \frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_2(x)\frac{\partial u}{\partial x_2'}\right) = -f(x), \tag{4}$$

donde $k_1(x)$ es el coeficiente de conductibilidad térmica a largo del eje Ox_1 y $k_2(x)$, el coeficiente de conductibilidad térmica a lo largo del eje Ox_2.

La densidad de fuentes puede ser una función prefijada del punto x, también puede depender de la solución incógnita $u(x)$. Si la densidad de fuentes depende linealmente de la temperatura, al segundo miembro de la (4) conviene añadir la magnitud $q(x)u$. Si la densidad de fuentes depende asimismo del flujo de calor, el segundo miembro de la (4) toma la forma siguiente:

$$-\left(b_1(x)k_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1} + b_2(x)k_2(x)\frac{\partial u}{\partial x_2} - q(x)u + f(x)\right).$$

Poniendo en (4) esta expresión, obtendremos la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_2(x)\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) + \\ + r_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1} + r_2(x)\frac{\partial u}{\partial x_2} - q(x)u + f(x) = 0, \tag{5}$$

donde $r_1 = b_1k_1$, $r_2 = b_2k_2$.

Las ecuaciones (1) — (4) se pueden considerar como casos especiales de la ecuación (5).

A veces, al resolver los problemas, es racional hacer la sustitución de las variables independientes de modo que en nuevas variables el recinto, en el cual se busca la solución, sea el más sencillo posible. Esta sustitución puede provocar la aparición de derivadas mixtas en la ecuación (5). En las nuevas variables (para las cuales conservemos las designaciones antiguas) la ecuación (5) tendrá el aspecto:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_{11}(x)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_{12}(x)\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_{21}(x)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)+$$
$$+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_{22}(x)\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)+r_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1}+r_2(x)\frac{\partial u}{\partial x_2}-q(x)u+f(x)=0. \quad (6)$$

Dado que la ecuación (6) es elíptica, sus coeficientes $k_{\alpha\beta}(x)$ deben tomar una forma cuadrática de signo determinado, es decir, $|k_{11}(x)\xi_1^2+(k_{12}(x)+k_{21}(x))\xi_1\xi_2+k_{22}(x)\xi_2^2|\neq 0$ cuando

$$\xi_1^2+\xi_2^2\neq 0.$$

Pero esto sucede en caso de que

$$4k_{11}(x)\,k_{22}(x)>(k_{12}(x)+k_{21}(x))^2. \quad (7)$$

La correlación (6) es la ecuación elíptica lineal más general de segundo orden en el plano.

2. Condiciones de conjugación para las ecuaciones de segundo orden. Examinemos el problema de la distribución estacionaria del calor en dos cuerpos isótropos colindantes. Las ecuaciones que describen la distribución de la temperatura dentro de cada uno de estos cuerpos, tienen aspecto (3). Sean $k_1(x)$ y $u_1(x)$ el coeficiente de conductibilidad térmica y la temperatura del primer cuerpo a la vez que $k_2(x)$ y $u_2(x)$ el coeficiente de conductibilidad térmica y la temperatura del segundo cuerpo, respectivamente. Sea que los cuerpos hacen contacto por la superficie cilíndrica S, cuya directriz C se prefija a base de la ecuación $\varphi(x_1, x_2)=0$, y los valores de los coeficientes de conductibilidad térmica $k_1(x)$ y $k_2(x)$ en esta curva son diferentes. Supongamos que el contacto entre los cuerpos es perfecto, es decir, las temperaturas y los flujos de calor de las superficies de contacto de ambos cuerpos son idénticos. Esto significa que en la curva $\varphi(x_1, x_2)=0$ deben verificarse las condiciones de forma:

$$u_2(x)-u_1(x)=0, \quad k_2\frac{\partial u_2}{\partial n}(x)-k_1\frac{\partial u_1}{\partial n}(x)=0, \quad x\in C,$$

donde n es la norma a C. Estas condiciones se denominan *condiciones de conjugación.*

Si la superficie de contacto es un plano, prefijado por la ecuación $x_1=\mathring{x}_1$, las condiciones de conjugación toman la forma

$$\begin{gathered}u_2(\mathring{x}_1, x_2)-u_1(\mathring{x}_1, x_2)=0,\\ k_2\frac{\partial u_2}{\partial x_1}(\mathring{x}_1, x_2)-k_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1}(\mathring{x}_1, x_2)=0.\end{gathered} \quad (8)$$

En adelante los valores de la temperatura de ambos cuerpos los designaremos por una letra u y los coeficientes de conductibilidad térmica, por una letra k. Entonces, el conjunto de los dos cuerpos se puede considerar como un solo cuerpo que tiene el coeficiente de conductibilidad térmica discontinuo. Es cómodo reescribir las condiciones de conjugación (8) en la forma

$$u(\overset{\circ}{x}_1+0,\ x_2)-u(\overset{\circ}{x}_1-0,\ x_2)=[u]_{x=\overset{\circ}{x}}=0,$$
$$k\frac{\partial u}{\partial x_1}(\overset{\circ}{x}_1+0,\ x_2)-k\frac{\partial u}{\partial x_1}(\overset{\circ}{x}_1-0,\ x_2)=\left[k\frac{\partial u}{\partial x_1}\right]_{x=\overset{\circ}{x}}=0, \qquad (9)$$

donde $\overset{\circ}{x}=(\overset{\circ}{x}_1,\ x_2)$.

Las condiciones de conjugación (9) no son las condiciones únicas posibles en la superficie de contacto de los cuerpos. Examinemos

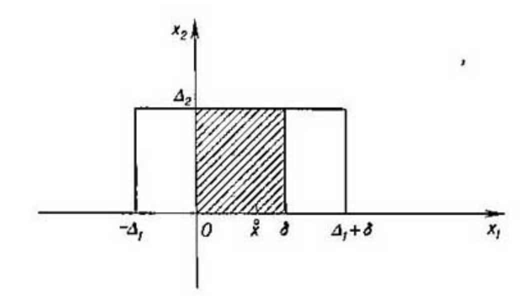


Fig. 16

otro modelo de contacto. Sea que entre dos cuerpos isótropos planos de coeficiente de conductibilidad térmica $k(x)$ está intercalada una capa fina débilmente conductora. El contacto entre los cuerpos y la capa intercalada se considera perfecto. Para sencillez supongamos que las superficies de contacto son planos y tienen las ecuaciones $x_1 = 0$ y $x_1 = \delta$. Cortemos mentalmente del cuerpo obtenido un prisma de sección (fig. 16)

$$\Pi = \{-\Delta_1 < x_1 < \delta + \Delta_1,\ 0 < x_2 < \Delta_2\}.$$

A base de las (3) y (9) tenemos

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(k\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)=-f, \quad \text{siendo} \quad -\Delta_1<x_1<0,$$
$$\delta<x_1<\delta+\Delta_1,\ 0<x_2<\Delta_2, \quad (10)$$

$$\varepsilon\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)=-f,\quad \text{siendo}\quad 0<x_1<\delta,\quad 0<x_2<\Delta_2,$$
$$[u]|_{x_1=0}=0,\quad \varepsilon\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big|_{x_1=+0}-k\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big|_{x_1=-0}=0,$$
$$[u]|_{x_1=\delta}=0,\quad k\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big|_{x_1=\delta+0}-\varepsilon\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big|_{x_1=\delta-0}=0, \tag{11}$$

donde ε = const es el coeficiente de conductibilidad térmica de la capa intercalada. Integremos la primera ecuación con respecto al recinto $-\Delta_1<x_1<0$, $0<x_2<\Delta_2$ y la segunda, con respecto al recinto $0<x_1<\mathring{x}_1$, $0<x_2<\Delta_2$, donde $\mathring{x}_1\in(0,\delta)$, luego sumemos las correlaciones obtenidas. Haciendo uso de las condiciones (11), como resultado obtendremos

$$\int_0^{\Delta_2}\left[\varepsilon\frac{\partial u}{\partial x_1}(\mathring{x}_1,\ x_2)-k\frac{\partial u}{\partial x_1}(-\Delta_1,\ x_2)\right]dx_2+$$
$$+\int_0^{\Delta_2}dx_2\left[\int_{-\Delta_1}^{0}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(k\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1,\ x_2)\right)dx_1+\int_0^{\mathring{x}_1}\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x_1,\ x_2)\,dx_1+\right.$$
$$\left.+\int_{-\Delta_1}^{\mathring{x}_1}f(x_1,\ x_2)\,dx_1\right]=0.$$

Dividamos por Δ_2 esta igualdad y supongamos que Δ_1 y Δ_2 tienden a cero:

$$\varepsilon\frac{\partial u}{\partial x_1}(\mathring{x}_1,\ 0)-k(0,\ 0)\frac{\partial u}{\partial x_1}(0,\ 0)+$$
$$+\int_0^{\mathring{x}_1}(\delta-x_1)\left[\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x_1,\ 0)+f(x_1,\ 0)\right]dx_1=0.$$

Integremos la obtenida correlación con respecto a $\mathring{x}_1$ entre 0 y δ:

$$\varepsilon[u(\delta,\ 0)-u(0,\ 0)]-\delta k(0,\ 0)\frac{\partial u}{\partial x_1}(0,\ 0)+$$
$$+\int_0^{\delta}(\delta-x_1)\left[\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x_1,\ 0)+f(x_1,\ 0)\right]dx_1=0,$$

después dividamos por δ, tendiendo ε y δ a cero de modo que ε/δ = $= \varkappa =$ const. Nos resultará

$$\varkappa[u]|_{x_1=0}=k\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big|_{x_1=-0}. \tag{12}$$

Análogamente hallamos la segunda condición de conjugación

$$\varkappa [u]|_{x_1=0} = k \left. \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|_{x_1=+0}. \quad (13)$$

De las (12) y (13), en particular, se desprende que el flujo calorífico en la línea de contacto es continuo

$$k \left. \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|_{x_1=+0} = k \left. \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|_{x_1=-0}$$

mientras que la temperatura, hablando en general, es discontinua.

Las condiciones de conjugación (12) y (13) pueden interpretarse como condiciones de contacto no perfecto. Los cuerpos que hacen contacto tienen en la superficie de contacto diferente temperatura cuyo salto es proporcional al flujo calorífico.

Para la ecuación (3) son posibles otras variantes de las condiciones de conjugación, entre las cuales destaquemos sólo la siguiente:

$$[u]=0, \quad \left[k \frac{\partial u}{\partial n} \right] = -\alpha (x), \quad x \in C. \quad (14)$$

De estas condiciones se deduce que en la superficie de contacto la temperatura es continua y el flujo de calor experimenta un salto prefijado. Esto quiere decir que en la superficie S están distribuidas fuentes concentradas con una densidad $\alpha (x)$.

3. Problemas de contorno fundamentales para las ecuaciones de segundo orden. Procederemos a discutir las condiciones de contorno para las ecuaciones de segundo orden. Las condiciones de contorno elementales son las de primer género, o sea, las condiciones del aspecto

$$u (x) = g (x), \quad \text{siendo} \quad x \in \Gamma, \quad (15)$$

donde Γ es la frontera del recinto G, en el que se prefija, digamos, la ecuación (6). Si se considera un problema de calor, las condiciones (15) preestablecen la temperatura del cuerpo en su superficie.

Si en la frontera está dado un flujo (calorífico), entonces tenemos el segundo problema de contorno. Si el cuerpo es isótropo, es decir, si el proceso se describe por la ecuación (3), las condiciones de segundo género, en concordancia con el § 1 del capítulo I, tienen la forma

$$k \frac{\partial u}{\partial n} = -g (x), \quad x \in \Gamma. \quad (16)$$

Aquí n es la normal interior con respecto a la frontera Γ.

En la frontera Γ con frecuencia se preestablece la condición de tercer género, es decir, una condición de la forma

$$k \frac{\partial u}{\partial n} = \varkappa (u - u_0) = \varkappa u - g (x), \quad x \in \Gamma, \quad (17)$$

donde $\varkappa (x)$ y $u_0 (x)$ son ciertas funciones dadas y $g (x) = \varkappa (u)\, u_0 (x)$. Las condiciones (17) expresan el intercambio de calor entre el cuerpo y el medio ambiente de acuerdo con la ley de Newton; en este caso

$\varkappa(x)$ es el coeficiente del intercambio térmico y $u_0(x)$ es una temperatura del medio ambiente. Las condiciones de frontera de segundo género (16) son un caso parcial de las condiciones de frontera de tercer género (17), siendo $\varkappa \equiv 0$.

Para la ecuación (6) la condición análoga de la condición (17) es la siguiente:

$$\frac{\partial u}{\partial N} = \sum_{\alpha,\,\beta=1}^{2} k_{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\cos(n,\ x_\alpha) = \varkappa u - g(x), \qquad x \in \Gamma, \tag{18}$$

donde n es la normal interior hacia la frontera Γ y $\partial u/\partial N$ es la así llamada derivada con respecto a la conormal. Para $k_{12} = k_{21} = 0$ y $k_{11} = k_{22} = k$ la condición (18) se convierte en la condición (17).

Para la ecuación (6) o para cualquier caso particular de ésta puede plantearse un problema con una derivada oblicua, o sea, el problema de hallar la solución de la ecuación (6) que en la frontera satisface la condición de contorno

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \varkappa u - g(x), \qquad x \in \Gamma, \tag{19}$$

donde $l \equiv l(x)$ es cierto campo prefijado de direcciones, para el que, hablando en general, $\partial u/\partial l$ no coincide con $\partial u/\partial N$.

Además de las condiciones de frontera clásicas de primer, segundo y tercer género, en la frontera Γ pueden prefijarse otras condiciones. Vamos a obtener la condición de frontera la que describe el intercambio de calor entre un cuerpo y el medio ambiente según la ley de Newton, habiendo en la superficie del cuerpo una capa fina buena conductora. Para sencillez supondremos que el cuerpo es isótropo y su superficie es plana. Sea que la capa está situada en la parte izquierda de la superficie del cuerpo conductor de calor, la superficie izquierda de la capa está prefijada mediante la ecuación $x_1 = -\delta$ en tanto que la superficie derecha de la misma y la superficie izquierda del cuerpo, por medio de la ecuación $x_1 = 0$. Destaquemos en la vecindad de la frontera un prisma de la sección rectangular $-\delta < x_1 < \Delta_1$, $0 < x_2 < \Delta_2$. Consideraremos que el contacto entre la capa y el cuerpo es perfecto. Entonces, basándonos en las (3), (9) y (17), tendremos

$$\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) = -f(x), \quad -\delta < x_1 < 0, \quad 0 < x_2 < \Delta_2, \tag{20}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(k\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) = -f(x), \quad 0 < x_1 < \Delta_1, \quad 0 < x_2 < \Delta_2,$$

$$[u] = 0, \quad \text{siendo} \quad x_1 = 0; \quad k\frac{\partial u}{\partial x_1}\bigg|_{x_1=+0} - \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial x_1}\bigg|_{x_1=-0} = 0, \tag{21}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial x_1} = \varkappa u - g(x), \quad \text{siendo} \quad x_1 = -\delta, \tag{22}$$

donde $1/\varepsilon$ es el coeficiente de conductibilidad térmica de la capa.

Integremos cada una de las ecuaciones (20) respecto a su dominio dado, sumemos las correlaciones obtenidas y hagamos uso de las condiciones de conjugación (21) y de la condición de frontera (22). En resultas obtendremos

$$\int_0^{\Delta_2}\left[k\frac{\partial u}{\partial x_1}(\Delta_1,\ x_2)-\varkappa(x_2)\,u(-\delta,\ x_2)+g(x_2)\right]dx_2+$$
$$+\int_0^{\Delta_2}\left[\int_{-\delta}^{0}\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x_1,\ x_2)\,dx_1+\int_0^{\Delta_1}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(k\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1,\ x_2)\right)dx_1+\right.$$
$$\left.+\int_{-\delta}^{\Delta_1}f(x_1,\ x_2)\,dx_1\right]dx_2=0.$$

Dividamos esta correlación en Δ_2 y pasamos al límite para Δ_1 y Δ_2 que tienden a cero:

$$k\frac{\partial u}{\partial x_1}(0,\ 0)-\varkappa(0)\,u(-\delta,\ 0)+g(0)+$$
$$+\int_{-\delta}^{0}\left[\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x_1,\ 0)+f(x_1,\ 0)\right]dx_1=0.$$

Sea que ε y δ tienden a cero de modo que $\delta/\varepsilon=\sigma=\text{const}$. Como resultado hallamos la condición incógnita de frontera

$$k\frac{\partial u}{\partial x_1}+\sigma\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}=\varkappa u-g,\qquad x_1=0. \tag{23}$$

Esclarezcamos qué condición debe ponerse en el punto angular, si en los lados del cuerpo adyacentes a este punto existen capas finas, posiblemente de diferente grosor. Sea que el ángulo es recto, su vértice está situado en el origen de coordenadas, los lados son paralelos a los ejes y el cuerpo se dispone en el primer cuadrante. Destaquemos en el entorno del punto angular un rectángulo $-\delta_1<x_1<\Delta_1$, $-\delta_2<x_2<\Delta_2$ (fig. 17). Escribamos la ecuación, las condiciones de conjugación y las condiciones de frontera:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(k\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)=-f,\ \text{siendo}\ 0<x_1<\Delta_1,\ 0<x_2<\Delta_2,$$
$$\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)=-f,\quad -\delta_1<x_1<0,\quad -\delta_2<x_2<\Delta_2,$$
$$0\leqslant x_1<\Delta_1,\quad -\delta_2<x_2<0, \tag{24}$$

$$[u]=0,\quad k\frac{\partial u}{\partial x_1}(+0,\ x_2)-\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial x_1}(-0,\ x_2)=0,\quad 0<x_2<\Delta_2,$$
$$[u]=0,\quad k\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1,\ +0)-\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1,\ -0)=0,\quad 0<x_1<\Delta_1, \tag{25}$$
$$\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial x_1}=\varkappa_1 u-g_1,\quad x_1=-\delta_1,$$
$$\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial x_2}=\varkappa_2 u-g_2,\quad \text{siendo}\quad x_2=-\delta_2. \tag{26}$$

Integremos cada una de las ecuaciones (24) entre los límites correspondientes, hagamos uso de las condiciones de conjugación (25)

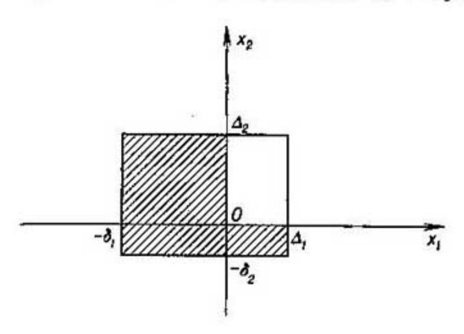


Fig. 17

y de las condiciones de frontera (26):

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\delta_2}^{0}\frac{\partial u}{\partial x_1}(\Delta_1,\ x_2)\,dx_2+\int_{0}^{\Delta_2}k\frac{\partial u}{\partial x_1}(\Delta_1,\ x_2)\,dx_2+$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\delta_1}^{0}\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1,\Delta_2)\,dx_1+\int_{0}^{\Delta_1}k\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1,\ \Delta_2)\,dx_1-$$
$$-\int_{-\delta_2}^{\Delta_2}(\varkappa_1 u-g_1)\,dx_2-\int_{-\delta_1}^{\Delta_1}(\varkappa_2 u-g_2)\,dx_1+\int_{-\delta_1}^{\Delta_1}dx_1\int_{-\delta_2}^{\Delta_2}f(x_1,\ x_2)\,dx_2=0.$$

Sea que Δ_1 y Δ_2 tienden a cero; ε, δ_1 y δ_2 también tienden a cero, pero con la condición de que $\delta_1/\varepsilon=\sigma_1=\text{const}$, $\delta_2/\varepsilon=\sigma_2=\text{const}$. En definitiva obtenemos

$$\sigma_1\frac{\partial u}{\partial x_2}+\sigma_2\frac{\partial u}{\partial x_1}=0,\quad x_1=0,\quad x_2=0. \tag{27}$$

§ 2. Aproximaciones de red de las ecuaciones de segundo orden

En este párrafo se construirán las aproximaciones de red de las ecuaciones diferenciales de segundo orden, aportadas en el § 1.

1. Aproximaciones en diferencias de las ecuaciones de coeficientes variables sin derivadas mixtas. En el capítulo anterior hemos construido una serie de los esquemas para la ecuación de Poisson. Aquí examinaremos una ecuación elíptica de segundo orden más generalizada, por ejemplo, la ecuación (4) del § 1:

$$Lu \equiv \frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_2(x)\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)=-f(x). \qquad (1)$$

Sea Ω una red uniforme rectangular sobre el plano Ox_1x_2. En el capítulo II se ha indicado el procedimiento de aproximación de los operadores diferenciales corrientes de segundo orden con los coeficientes variables. Puesto que el operador L es la suma de dos operadores de este tipo, la aproximación de la ecuación (1) puede escribirse de una vez. A saber,

$$\Lambda y=(a_1 y_{\bar{x}_1})_{x_1}+(a_2 y_{\bar{x}_2})_{x_2}=-\varphi(x), \qquad (2)$$

donde los coeficientes $a_\alpha(x)$, $\alpha=1, 2$, y $\varphi(x)$ pueden eligirse como sigue

$$a_1(x)=k_1\left(x_1-\frac{h_1}{2},\ x_2\right),\quad a_2(x)=k_2\left(x_1,\ x_2-\frac{h_2}{2}\right), \qquad (3)$$

$$\varphi(x)=f(x),\quad x=(x_1,\ x_2),\qquad x_1=i_1h_1,\quad x_2=i_2h_2.$$

Con esta elección de los coeficientes la ecuación en diferencias (2) aproximará la ecuación (1) con el error $O(|h|^2)$, donde $|h|^2=$ $=h_1^2+h_2^2$. El orden del error de aproximación no se altera al eligir los coeficientes $a_\alpha(x)$ del modo siguiente:

$$a_1(x)=\frac{k_1(x_1,\ x_2)+k_1(x_1-h_1,\ x_2)}{2},$$
$$a_2(x)=\frac{k_2(x_1,\ x_2)+k_2(x_1,\ x_2-h_2)}{2}. \qquad (4)$$

Asimismo son posibles otras variantes de eligir a_α y φ. Señalemos que, al escribir la ecuación en diferencias (2) se utiliza el modelo de cinco puntos de tipo «cruz».

Ahora sea Ω una red rectangular no uniforme arbitraria y

$$h_\alpha=h_\alpha^{(i_\alpha)}=x_\alpha^{(i_\alpha)}-x_\alpha^{(i_\alpha-1)},\quad \hbar_\alpha=\frac{h_\alpha+h_\alpha^+}{2},$$

$$h_\alpha^+=h_\alpha^{(i_\alpha+1)}=x_\alpha^{(i_\alpha+1)}-x_\alpha^{(i_\alpha)},\quad \alpha=1,\ 2.$$

En esta red la ecuación (1) se puede aproximar del siguiente modo:

$$\Lambda y=(a_1 y_{\bar{x}_1})_{\hat{x}_1}+(a_2 y_{\bar{x}_2})_{\hat{x}_2}=-\varphi(x), \tag{5}$$

donde a_α, $\alpha = 1, 2$, y $\varphi(x)$ se calculan de acuerdo con las fórmulas (3) ó (4). Tengamos presente que

$$v_{\hat{x}_\alpha}=\frac{v^{(+1_\alpha)}-v}{\hbar_\alpha}.$$

La ecuación (5) puede construirse, por ejemplo, según el método de equilibrio seguido de la aproximación de coeficientes, el cual se empleó en el § 2 del capítulo II para la ecuación diferencial corriente.

Calculemos el error de aproximación $\psi = \Lambda u + \varphi$ de la ecuación (5) con los coeficientes (3). En virtud de (1) el error de aproximación puede adquirir la forma

$$\psi=\Lambda u+\varphi-Lu-f=\sum_{\alpha=1}^{2}\psi_\alpha+(\varphi-f),$$

donde

$$\psi_\alpha=(a_\alpha u_{\bar{x}_\alpha})_{\hat{x}_\alpha}-\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right). \tag{6}$$

Calculemos ψ_α. Tienen lugar las fórmulas

$$w^{(+0,5_\alpha)}=w+\frac{h_\alpha^+}{2}\frac{\partial w}{\partial x_\alpha}+\frac{(h_\alpha^+)^2}{8}\frac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha^2}+O((h_\alpha^+)^3),$$

$$w^{(-0,5_\alpha)}=w-\frac{h_\alpha}{2}\frac{\partial w}{\partial x_\alpha}+\frac{h_\alpha^2}{8}\frac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha^2}+O(h_\alpha^3),$$

de las cuales se desprende que

$$\frac{1}{\hbar_\alpha}\{w^{(+0,5_\alpha)}-w^{(-0,5_\alpha)}\}=\frac{\partial w}{\partial x_\alpha}+\frac{1}{8\hbar_\alpha}[(h_\alpha^+)^2-h_\alpha^2]\frac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha^2}+O(\hbar_\alpha^2).$$

Dado que $\frac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha^2}=\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha^2}\right)^{(+1_\alpha)}+O(h_\alpha^+)$, la última identidad permite representar $\partial w/\partial x_\alpha$ en la forma

$$\frac{\partial w}{\partial x_\alpha}=(w^{(-0,5_\alpha)})_{\hat{x}_\alpha}-\frac{1}{8}\left(h_\alpha^2\frac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha^2}\right)_{\hat{x}_\alpha}+O(\hbar_\alpha^2).$$

Suponiendo en ésta $w = k_\alpha\, \partial u/\partial x_\alpha$, tendremos

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)=\left\{\left(k_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)^{(0,5_\alpha)}-\frac{1}{8}h_\alpha^2\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2}\left(k_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)\right\}_{\hat{x}_\alpha}+O(\hbar_\alpha^2).$$

Por lo tanto

$$\psi_\alpha=(\eta_\alpha)_{\hat{x}_\alpha}+O(h_\alpha^2), \tag{7}$$

donde

$$\eta_\alpha = a_\alpha u_{\bar{x}_\alpha} - \left(k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)^{(-0,5_\alpha)} + \frac{h_\alpha^2}{8} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2} \left(k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right).$$

Apreciemos η_α. Como

$$u = \left(u + 0,5h_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + \frac{h_\alpha^2}{8} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}\right)^{(-0,5_\alpha)} + O(h_\alpha^3),$$

$$u^{(-1_\alpha)} = \left(u - 0,5h_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + \frac{h_\alpha^2}{8} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}\right)^{(-0,5_\alpha)} + O(h_\alpha^3),$$

entonces

$$u_{\bar{x}_\alpha} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)^{(-0,5_\alpha)} + O(h_\alpha^2)$$

y, por consiguiente,

$$\eta_\alpha = (a_\alpha - k^{(-0,5_\alpha)}) \left(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)^{(-0,5_\alpha)} + O(h_\alpha^2). \quad (8)$$

Considerando (3), para η_α tendremos la acotación

$$\eta_\alpha = O(h_\alpha^2).$$

De esta manera, si la solución $u(x_1, x_2)$ de la ecuación (1) tiene derivadas continuas respecto a x_1 y x_2 de hasta el cuarto orden inclusive, el error ψ de aproximación de la ecuación (5), la que tiene los coeficientes y el segundo miembro (3), puede representarse en la forma

$$\psi = \sum_{\alpha=1}^{2} (\eta_\alpha)_{\hat{x}_\alpha} + \psi^*, \quad \psi^* = O(h_1^2 + h_2^2), \quad \eta_\alpha = O(h_\alpha^2). \quad (9)$$

2. Esquemas en diferencias para una ecuación de derivadas mixtas y coeficientes variables. Dirijámonos a la ecuación

$$Lu \equiv \sum_{\alpha,\,\beta=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_{\alpha\beta}(x) \frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right) = -f(x). \quad (10)$$

Esta ecuación es un caso especial de la ecuación (6) del § 1. Será elíptica, si sus coeficientes satisfacen la condición (7) del § 1.

La construcción de la aproximación en diferencias para la ecuación (10) sobre una red uniforme no ofrece dificultades algunas. Es fácil comprobar que la ecuación

$$\Lambda y \equiv \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\,\beta=1}^{2} [(k_{\alpha\beta}(x)\, y_{\bar{x}_\beta})_{x_\alpha} + (k_{\alpha\beta}(x)\, y_{x_\beta})_{\bar{x}_\alpha}] = -f(x) \quad (11)$$

aproxima la ecuación (10) con el error $O(|h|^2)$. Para la ecuación (10) indiquemos una aproximación más con el mismo error

$$\Lambda y \equiv \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{2} [(k_{\alpha\alpha} y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha} + (k_{\alpha\alpha} y_{x_\alpha})_{\bar{x}_\alpha}] +$$

$$+ \frac{1}{4} \sum_{\alpha \neq \beta} [(k_{\alpha\beta} y_{\bar{x}_\beta})_{x_\alpha} + (k_{\alpha\beta} y_{x_\beta})_{\bar{x}_\alpha} + (k_{\alpha\beta} y_{\bar{x}_\beta})_{\bar{x}_\alpha} + (k_{\alpha\beta} y_{x_\beta})_{x_\alpha}] = -f(x). \tag{12}$$

En el caso de los coeficientes constantes $k_{\alpha\beta}$ la ecuación (12) toma la forma

$$\sum_{\alpha=1}^{2} k_{\alpha\alpha} y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} + (k_{12} + k_{21}) y_{\overset{\circ}{x}_1 \overset{\circ}{x}_2} = -f(x), \tag{13}$$

donde

$$v_{\overset{\circ}{x}_\alpha} = (v^{(+1_\alpha)} - v^{(-1_\alpha)})/(2h_\alpha).$$

Ahora construyamos la aproximación en diferencias para la ecuación (10) sobre una red no uniforme. Realizaremos la construcción con auxilio del método de Bubnov — Galerkin (véase el § 3 del capítulo II).

Tengamos presente (véase el capítulo I) que se llama solución generalizada de $W_2^1(G)$ para la ecuación (10) una función $u(x) \in W_2^1(G)$ la cual, siendo cualquiera la función

$$v(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(G),$$

satisface la identidad integral

$$\iint_G \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} k_{\alpha\beta}(x) \frac{\partial u}{\partial x_\beta} \frac{\partial v}{\partial x_\alpha} dx_1 dx_2 = \iint_G f(x) v(x) dx_1 dx_2. \tag{14}$$

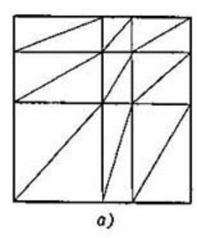
Denominemos solución aproximada de la ecuación (10) la función $\bar{u}(x) \in V$ la cual, cualquiera que sea $v(x) \in \overset{\circ}{V}$, satisface la identidad integral (14). Aquí V es un subespacio determinado de dimensión finita del espacio $W_2^1(G)$ y $\overset{\circ}{V} = V \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$.

Prefijemos un espacio V. Sea Ω una red rectangular no uniforme arbitraria sobre el plano Ox_1x_2, formada por los puntos de intersección de las dos familias de rectas

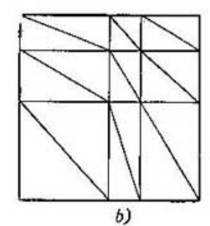
$$x_1 = x_1^{(i_1)}, \quad x_2 = x_2^{(i_2)}, \quad i_\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; \alpha = 1, 2, \ldots$$

Estas rectas dividen el plano Ox_1x_2 en las casillas rectangulares $G[i] = \{x = (x_1, x_2) | x_\alpha^{(i_\alpha)} \leqslant x_\alpha \leqslant x_\alpha^{(i_\alpha + 1)}\}$. Dividamos cada una de

estas casillas por una línea que une sus vértices opuestos $(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)})$, $(x_1^{(i_1+1)}, x_2^{(i_2+1)})$ en dos triángulos (fig. 18, *a*). Designemos a través de $\Delta^+[i]$ el triángulo superior izquierdo y el triángulo inferior derecho, mediante $\Delta^-[i]$. Sea $\overline{G}_h$ el conjunto de todos los triángulos $\Delta^\pm[i]$ cuya intersección con el recinto G



a)



b)

Fig. 18

no es vacía, es decir, $\overline{G}_h = \{x \mid x \in \Delta^\pm[i],\ \Delta^\pm[i] \cap G \neq \varnothing\}$. Entonces, en calidad de subespacio V del espacio $W_2^1(G)$ tomemos el espacio de funciones continuas en $\overline{G}_h$ y lineales sobre cada uno de los triángulos $\Delta^\pm[i] \in \overline{G}_h$.

Designemos por $\overline{\omega} = \overline{G}_h \cap \Omega$ el conjunto de los puntos de la red Ω situados en $\overline{G}_h$ y por $\mathfrak{M} = \{i = (i_1, i_2) \mid x_i \in \overline{\omega}\}$ el conjunto

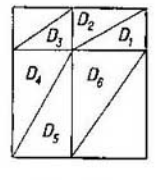


Fig. 19

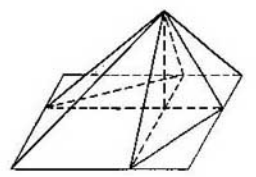


Fig. 20.

de los números de los nodos de la red. En tal caso la solución aproximada de la ecuación (10) puede buscarse en la forma

$$\overline{u}(x) = \sum_{j \in \mathfrak{M}} y_j \eta_j(x), \quad j = (j_1, j_2), \tag{15}$$

donde $\{\eta_j\}$ es la base del espacio V.

Prefijemos la base en el V. Sea $D[i]$ el hexágono formado por la unión de seis triángulos $\Delta^\pm[i]$ que tienen un vértice coincidente con el nodo x_i (fig. 19). En calidad de base en V tomemos un conjunto

de funciones continuas lineales a trozos, cada una de las cuales difiere de cero en un solo nodo de la red $\overline{\omega}$. Asumamos que este valor diferente a cero es igual a la unidad. Por lo tanto cada una de las funciones de base $\eta_i(x)$ será distinta de cero sólo en $D[i]$ y se prefijará por la siguiente correlación:

$$\eta_{i_1 i_2}(x) = \begin{cases} (x_1^{(i_1+1)} - x_1)/h_1^+, & x \in D_1[i], \\ (x_2^{(i_2+1)} - x_2)/h_2^+, & x \in D_2[i], \\ (x_1 - x_1^{(i_1)})/h_1 + (x_2^{(i_2+1)} - x_2)/h_2^+, & x \in D_3[i], \\ (x_1 - x_1^{(i_1-1)})/h_1, & x \in D_4[i], \\ (x_2 - x_2^{(i_2-1)})/h_2, & x \in D_5[i], \\ (x_1^{(i_1+1)} - x_1)/h_1^+ + (x_2 - x_2^{(i_2)})/h_2, & x \in D_6[i], \\ 0 & x \overline{\in} D_\mu[i], \\ & \mu = 1, \ldots, 6. \end{cases} \tag{16}$$

El aspecto de la función (16) se muestra en la fig. 20. Para una base elijida los coeficientes y_j de la (15) son los valores de la solución aproximada en los nodos de la red $\overline{\omega}$.

Hallemos aquellas ecuaciones a las cuales deben satisfacer los parámetros y_j desconocidos de la (15). Con este fin hagamos la sustitución en la (14)

$$u(x) \equiv \overline{u}(x) \quad \text{y} \quad v(x) \equiv \eta_i(x).$$

Como resultado obtendremos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\sum_{j \in \mathfrak{M}} A_i^j y_j = \Phi_i, \qquad i \in \mathfrak{M}, \tag{17}$$

donde

$$A_i^j = \sum_{\alpha, \beta=1}^{2} \iint_{G \cap \overline{D}[i]} k_{\alpha\beta} \frac{\partial \eta_i}{\partial x_\beta} \frac{\partial \eta_j}{\partial x_\alpha} dx_1 dx_2, \tag{18}$$

$$\Phi_i = \iint_{G \cap \overline{D}[i]} f \eta_i \, dx_1 dx_2, \quad i = (i_1, i_2), \quad j = (j_1, j_2). \tag{19}$$

Suponiendo primeramente que los coeficientes $k_{\alpha\beta}$ son constantes y empleando el aspecto de las funciones $\eta_i(x)$, calculemos los coeficientes A_i^j para aquellos valores de i para los cuales $D[i] \subset G$.

A base de la (16) hallamos que

$$\frac{\partial\eta_i}{\partial x_1}=\begin{cases}-1/h_1^+, & x\in D_1,\\ 0, & x\in D_2,\\ 1/h_1, & x\in D_3,\\ 1/h_1, & x\in D_4,\\ 0, & x\in D_5,\\ -1/h_1^+, & x\in D_6,\\ 0, & x\overline{\in} D_\mu,\\ \mu=1,\ \ldots,\ 6, & \end{cases}\qquad \frac{\partial\eta_i}{\partial x_2}=\begin{cases}0, & x\in D_1,\\ -1/h_2^+, & x\in D_2,\\ -1/h_2^+, & x\in D_3,\\ 0, & x\in D_4,\\ 1/h_2, & x\in D_5,\\ 1/h_2, & x\in D_6,\\ 0, & x\overline{\in} D_\mu,\\ \mu=1,\ \ldots,\ 6. & \end{cases}\qquad (20)$$

De (18) y (20) se desprende que diferentes de cero pueden ser sólo los siguientes coeficientes:

$$A_{i_1i_2}^{i_1i_2},\quad A_{i_1i_2}^{i_1+1,\,i_2},\quad A_{i_1i_2}^{i_1-1,\,i_2},\quad A_{i_1i_2}^{i_1,\,i_2-1},\quad A_{i_1i_2}^{i_1,\,i_2+1},$$
$$A_{i_1i_2}^{i_1+1,\,i_2+1},\quad A_{i_1i_2}^{i_1-1,\,i_2-1}.$$

Los cálculos muestran que

$$A_{i_1i_2}^{i_1i_2}=\frac{k_{11}}{2}\left(\frac{h_2^+}{h_1^+}+\frac{h_2}{h_1}+\frac{h_2^+}{h_1}+\frac{h_2}{h_1^+}\right)+$$
$$+\frac{k_{22}}{2}\left(\frac{h_1^+}{h_2^+}+\frac{h_1}{h_2}+\frac{h_1}{h_2^+}+\frac{h_1^+}{h_2}\right)-(k_{12}+k_{21}),$$
$$A_{i_1i_2}^{i_1+1,\,i_2}=-\frac{k_{11}}{2}\left(\frac{h_2^+}{h_1^+}+\frac{h_2}{h_1^+}\right)+\frac{k_{12}+k_{21}}{2},$$
$$A_{i_1i_2}^{i_1-1,\,i_2}=-\frac{k_{11}}{2}\left(\frac{h_2^+}{h_1}+\frac{h_2}{h_1}\right)+\frac{k_{12}+k_{21}}{2},$$
$$A_{i_1i_2}^{i_1,\,i_2+1}=-\frac{k_{22}}{2}\left(\frac{h_1^+}{h_2^+}+\frac{h_1}{h_2^+}\right)+\frac{k_{12}+k_{21}}{2},\qquad (21)$$
$$A_{i_1i_2}^{i_1,\,i_2-1}=-\frac{k_{22}}{2}\left(\frac{h_1^+}{h_2}+\frac{h_1}{h_2}\right)+\frac{k_{12}+k_{21}}{2},$$
$$A_{i_1i_2}^{i_1+1,\,i_2+1}=A_{i_1i_2}^{i_1-1,\,i_2-1}=-\frac{k_{12}+k_{21}}{2}.$$

Sustituyendo (21) en (17) y transformando, obtendremos

$$\Lambda^+y\equiv k_{11}y_{\bar{x}_1\hat{x}_1}+k_{22}y_{x_2\check{x}_2}\frac{k_{12}+k_{21}}{2}(y_{\hat{x}_1\hat{x}_2}+y_{\check{x}_1\check{x}_2})=\frac{-1}{\hbar_1\hbar_2}\Phi.$$

Sean ahora $k_{\alpha\beta}$ variables. En este caso escribamos la aproximación en diferencias de la ecuación (10) a semejanza de la aproximación que acabamos de construir

$$\Lambda^+y\equiv\frac{1}{2}\Big\{\sum_{\alpha=1}^{2}[(k_{\alpha\alpha}y_{\bar{x}_\alpha})_{\hat{x}_\alpha}+(k_{\alpha\alpha}y_{x_\alpha})_{\check{x}_\alpha}]+$$
$$+\sum_{\substack{\alpha,\,\beta=1\\ \alpha\neq\beta}}^{2}[(k_{\alpha\beta}y_{\hat{x}_\beta})_{\hat{x}_\alpha}+(k_{\alpha\beta}y_{\check{x}_\beta})_{\check{x}_\alpha}]\Big\}=-f(x).\qquad (22)$$

Calculemos el error de aproximación $\psi^+ = \Lambda^+ u + f$ de la ecuación (22). Inicialmente transformemos ψ^+, sustituyendo, en virtud de la (10), f por $-Lu$ y escribiéndolo en forma de la suma

$$\psi^+ = \Lambda^+ u - Lu = \sum_{\alpha, \beta=1}^{2} \psi^+_{\alpha\beta},$$

donde

$$\psi^+_{\alpha\alpha} = \frac{1}{2} [(k_{\alpha\alpha} u_{x_\alpha})_{\hat{x}_\alpha} + (k_{\alpha\alpha} u_{x_\alpha})_{\check{x}_\alpha}] - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_{\alpha\alpha} \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right),$$

y

$$\psi^+_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} [(k_{\alpha\beta} u_{\hat{x}_\beta})_{\hat{x}_\alpha} + (k_{\alpha\beta} u_{\check{x}_\beta})_{\check{x}_\alpha}] - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_{\alpha\beta} \frac{\partial u}{\partial x_\beta} \right), \quad \alpha \neq \beta.$$

Advirtiendo que

$$\frac{1}{2} [(k_{\alpha\alpha} u_{\bar{x}_\alpha})_{\hat{x}_\alpha} + (k_{\alpha\alpha} u_{x_\alpha})_{\check{x}_\alpha}] = \frac{1}{2} ((k_{\alpha\alpha} + k_{\alpha\alpha}^{(-1_\alpha)}) u_{\bar{x}_\alpha})_{\hat{x}_\alpha},$$

y teniendo presente (6) y (7), hallamos que

$$\psi^+_{\alpha\alpha} = (\eta^+_{\alpha\alpha})_{\hat{x}_\alpha} + O(h_\alpha^2),$$

mas, como

$$k_{\alpha\alpha} + k_{\alpha\alpha}^{(-1_\alpha)} - 2k_{\alpha\alpha}^{(-0,5_\alpha)} = O(h_\alpha^2),$$

entonces a base de (8)

$$\eta^+_{\alpha\alpha} = O(h_\alpha^2).$$

Luego

$$(k_{\alpha\beta} u_{\hat{x}_\beta})_{\hat{x}_\alpha} + (k_{\alpha\beta} u_{\check{x}_\beta})_{\check{x}_\alpha} = \frac{h_1^+ h_2^+}{\hbar_1 \hbar_2} (k_{\alpha\beta} u_{x_\beta})_{x_\alpha} + \frac{h_1 h_2}{\hbar_1 \hbar_2} (k_{\alpha\beta} u_{\bar{x}_\beta})_{\bar{x}_\alpha} =$$

$$= \frac{h_1^+ h_2^+ + h_1 h_2}{\hbar_1 \hbar_2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_{\alpha\beta} \frac{\partial u}{\partial x_\beta} \right) + \frac{(h_\alpha^+)^2 h_\beta^+ - h_\alpha^2 h_\beta}{2\hbar_1 \hbar_2} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2} \left(k_{\alpha\beta} \frac{\partial u}{\partial x_\beta} \right) +$$

$$+ \frac{h_\alpha^+ (h_\beta^+)^2 - h_\alpha h_\beta^2}{2\hbar_1 \hbar_2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\beta^2} \right) + O(\hbar_1^2 + \hbar_2^2),$$

y, por consiguiente,

$$\psi^+_{\alpha\beta} = \frac{(h_1^+ - h_1)(h_2^+ - h_2)}{4\hbar_1 \hbar_2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_{\alpha\beta} \frac{\partial u}{\partial x_\beta} \right) + \frac{(h_\alpha^+)^2 h_\beta^+ - h_\alpha^2 h_\beta}{4\hbar_1 \hbar_2} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2} \left(k_{\alpha\beta} \frac{\partial u}{\partial x_\beta} \right) +$$

$$+ \frac{h_\alpha^+ (h_\beta^+)^2 - h_\alpha h_\beta^2}{4\hbar_1 \hbar_2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\beta^2} \right) + O(\hbar_1^2 + \hbar_2^2), \quad \alpha \neq \beta.$$

Sustituyendo $\psi^+_{\alpha\beta}$ en la expresión para ψ^+, hallamos que $\psi^+ = O(1)$, es decir, en el punto no hay aproximación.

Construyamos otra aproximación de la ecuación (10). Para ello empleemos el mismo método, pero el plano se divide en triángulos de una manera diferente, según se muestra en la fig. 18, b). Razonando análogamente, obtendremos la ecuación

$$\Lambda^- y = \frac{1}{2}\left\{ \sum_{\alpha=1}^{2} \left[(k_{\alpha\alpha} y_{\bar{x}_\alpha})_{\hat{x}_\alpha} + (k_{\alpha\alpha} y_{x_\alpha})_{\check{x}_\alpha}\right] + \sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha\neq\beta}}^{2} \left[(k_{\alpha\beta} y_{\check{x}_\beta})_{\hat{x}_\alpha} + (k_{\alpha\beta} y_{\hat{x}_\beta})_{\check{x}_\alpha}\right]\right\} = -f,$$

cuyo error de aproximación $\psi^- = \Lambda^- u + f$ tiene el aspecto

$$\psi^- = \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \psi_{\alpha\beta}^-,$$

donde $\psi_{\alpha\alpha}^- = \psi_{\alpha\alpha}^+$ y

$$\psi_{\alpha\beta}^- = -\frac{(h_1^+ - h_1)(h_2^+ - h_2)}{4\hbar_1\hbar_2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right) + \frac{(h_\alpha^+)^2 h_\beta - h_\alpha^2 h_\beta^+}{4\hbar_1\hbar_2} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2}\left(k_{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right) + \frac{h_\alpha (h_\beta^+)^2 - h_\alpha^+ h_\beta^2}{4\hbar_1\hbar_2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 u}{\partial x_\beta^2}\right) + O(\hbar_1^2 + \hbar_2^2), \quad \alpha \neq \beta,$$

por consiguiente, $\psi^- = 0\ (1)$.

Utilizando los operadores Λ^+ y Λ^-, construyamos un nuevo operador $\Lambda = 1/2\,(\Lambda^+ + \Lambda^-)$ y con su auxilio escribamos una nueva aproximación de la ecuación (10)

$$\Lambda y \equiv \frac{1}{2}(\Lambda^+ + \Lambda^-)\, y = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}\left[(k_{\alpha\alpha} y_{\bar{x}_\alpha})_{\hat{x}_\alpha} + (k_{\alpha\alpha} y_{x_\alpha})_{\check{x}_\alpha}\right] + \frac{1}{4}\sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha\neq\beta}}^{2}\left[(k_{\alpha\beta} y_{\check{x}_\beta})_{\hat{x}_\alpha} + (k_{\alpha\beta} y_{\hat{x}_\beta})_{\check{x}_\alpha} + (k_{\alpha\beta} y_{\hat{x}_\beta})_{\hat{x}_\alpha} + (k_{\alpha\beta} y_{\check{x}_\beta})_{\check{x}_\alpha}\right] = -f(x). \qquad (23)$$

Calculemos el error de aproximación de la ecuación (23). Haciendo uso de las representaciones para $\psi_{\alpha\beta}^{\pm}$, hallamos que

$$\psi = \Lambda u + f = \sum_{\alpha=1}^{2} (\eta_\alpha)_{\hat{x}_\alpha} + \psi^*, \quad \eta_\alpha = O(h_\alpha^2), \quad \psi^* = O(\hbar_1^2 + \hbar_2^2). \qquad (24)$$

OBSERVACION. En una red uniforme la ecuación (23) coincide con la ecuación (12), construida anteriormente.

3. Esquema de aproximación de orden elevado para la ecuación de derivadas mixtas y coeficientes constantes. Construyamos el esquema en diferencias que aproxima la ecuación (10) en el caso de los coeficientes constantes con el error $O(|h|^4)$. Para escribir la ecuación en diferencias emplearemos el modelo de nueve puntos del tipo de «caja». Este modelo ya lo utilizabamos en el capítulo II al construir los esquemas de orden elevado de aproximación para la ecuación de Poisson. Sin embargo, resulta que es posible aproximar la ecuación (10) sobre el modelo indicado con el error $O(|h|^4)$ sólo bajo la condición de que los pasos de la red h_1 y h_2 se relacionen de una manera determinada con los coeficientes k_{11} y k_{22}. Consideraremos que $k_{11}=k_{22}=1$ y $k_{12}=k_{21}=\varkappa$. Entonces la red Ω debe ser cuadrada.

Primeramente estudiemos el operador en diferencias

$$\Lambda v = v_{\bar{x}_1x_1}+v_{\bar{x}_2x_2}+\varkappa\sigma(v_{\bar{x}_1x_2}+v_{x_1\bar{x}_2})+\varkappa(1-\sigma)(v_{\bar{x}_1\bar{x}_2}+v_{x_1x_2}),$$

donde σ es un parámetro arbitrario determinado. Descompongamos la función Λv según las potencias de h

$$\Lambda v = Lv+\frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial^4 v}{\partial x_1^4}+\frac{\partial^4 v}{\partial x_2^4}\right)+\frac{\varkappa h^2}{3}\left(\frac{\partial^4 v}{\partial x_1^3\,\partial x_2}+\frac{\partial^4 v}{\partial x_1\,\partial x_2^3}\right)+$$
$$+\frac{\varkappa(1-2\sigma)}{2}h^2\frac{\partial^4 v}{\partial x_1^2\,\partial x_2^2}+O(h^4)=$$
$$=Lv+\frac{h^2}{12}L^2v-\frac{h^2}{6}[1-3(1-2\sigma)\varkappa+2\varkappa^2]\frac{\partial^4 v}{\partial x_1^2\,\partial x_2^2}+O(h^4).$$

De aquí se desprende que la ecuación en diferencias

$$\Lambda' y = y_{\bar{x}_1x_1}+y_{\bar{x}_2x_2}+\varkappa[\sigma(y_{\bar{x}_1x_2}+y_{x_1\bar{x}_2})+(1-\sigma)(y_{x_1\bar{x}_2}+y_{\bar{x}_1x_2})]+$$
$$+\frac{h^2}{6}(1-3(1-2\sigma)\varkappa+2\varkappa^2)\,y_{\bar{x}_1x_1\bar{x}_2x_2}=-\varphi', \quad (25)$$

donde

$$\varphi' = f+\frac{h^2}{12}Lf, \quad (26)$$

aproxima la ecuación (10) con el error $O(h^4)$ con cualquier valor del parámetro σ.

Mostremos que en realidad la ecuación (25) no depende del parámetro σ. Es fácil comprobar que

$$y_{\bar{x}_1\bar{x}_2}=y_{x_1\bar{x}_2}-hy_{\bar{x}_1x_1\bar{x}_2}, \quad y_{x_1x_2}=y_{\bar{x}_1x_2}+hy_{\bar{x}_1x_1x_2},$$

y, por consiguiente,

$$y_{\bar{x}_1\bar{x}_2}+y_{x_1x_2}=y_{x_1\bar{x}_2}+y_{\bar{x}_1x_2}+h^2y_{\bar{x}_1x_1\bar{x}_2x_2}.$$

Sustituyendo esta correlación en la expresión para $\Lambda' y$, obtendremos que

$$\Lambda' y = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} + \varkappa [\sigma (y_{\bar{x}_1 x_2} + y_{x_1 \bar{x}_2}) + y_{x_1 \bar{x}_2} + y_{\bar{x}_1 x_2} + h^2 y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2} - \sigma (y_{\bar{x}_1 x_2} + y_{x_1 \bar{x}_2} + h^2 y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2})] + h^2 \left(\frac{1}{6} - \frac{\varkappa}{2} + \varkappa\sigma + \frac{\varkappa^2}{3} \right) y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2} = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} + \varkappa (y_{\bar{x}_1 x_2} + y_{x_1 \bar{x}_2}) + \frac{h^2}{6} (1 + 3\varkappa + 2\varkappa^2) y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2}.$$

Por lo tanto la ecuación en diferencias (25) toma la forma

$$\Lambda' y = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} + \varkappa (y_{\bar{x}_1 x_2} + y_{x_1 \bar{x}_2}) + \frac{h^2}{6} (1 + 3\varkappa + 2\varkappa^2) y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2} = -\varphi'. \tag{27}$$

4. Esquemas en diferencias para las ecuaciones con los términos menores.

Analicemos la ecuación

$$Lu = \sum_{\alpha=1}^{2} \left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_\alpha (x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) + r_\alpha (x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right] = -f(x) \tag{28}$$

y construyamos para ésta el esquema en diferencias sobre una red uniforme Ω.

El esquema elemental de aproximación de segundo orden para la ecuación (28) es el siguiente:

$$\Lambda y = \sum_{\alpha=1}^{2} [(a_\alpha (x) y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha} + r_\alpha (x) y_{\overset{\circ}{x}_\alpha}] = -f(x), \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega, \tag{29}$$

donde $a_\alpha (x)$ se calcula, por ejemplo, según las fórmulas (3). Escribamos la ecuación (29) en la forma

$$\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{a_\alpha^{(+1_\alpha)} + a_\alpha}{h_\alpha^2} y = \sum_{\alpha=1}^{2} \left\{ \left(\frac{a_\alpha^{(+1_\alpha)}}{h_\alpha^2} + \frac{r_\alpha}{2h_\alpha} \right) y^{(+1_\alpha)} + \left(\frac{a_\alpha}{h_\alpha^2} - \frac{r_\alpha}{2h_\alpha} \right) y^{(-1_\alpha)} \right\} + f(x).$$

En ésta se ve que en el caso de los coeficientes $r_\alpha (x)$ considerablemente mayores que los coeficientes $k_\alpha (x)$ el principio del máximo (véase el capítulo III) es válido para el esquema (29) sólo para h_α suficientemente pequeños. Para evitar esta restricción, construyamos otro esquema para la ecuación (28).

Reescribamos la ecuación (28) en la forma

$$Lu = \sum_{\alpha=1}^{2} \left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_\alpha(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) + \frac{r_\alpha(x)}{k_\alpha(x)} \cdot k_\alpha(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right] = -f(x)$$

y aproximaremos los flujos

$$-k_\alpha(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}$$

en los términos mayores y menores de una manera idéntica; entonces obtendremos

$$\Lambda y = \sum_{\alpha=1}^{2} \left[(a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha} + \frac{r_\alpha}{2k_\alpha} (a_\alpha^{(+1_\alpha)} y_{x_\alpha} + a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}) \right] = -f(x). \quad (30)$$

Es evidente que el error de aproximación del operador es $O(|h|^2)$. Transformemos los términos menores del siguiente modo:

$$\frac{r_\alpha}{2k_\alpha} a_\alpha^{(+1_\alpha)} y_{x_\alpha} = \frac{r_\alpha + |r_\alpha|}{2k_\alpha} a_\alpha^{(+1_\alpha)} y_{x_\alpha} - \frac{|r_\alpha|}{2k_\alpha} a_\alpha^{(+1_\alpha)} y_{x_\alpha}, \quad (31)$$

$$\frac{r_\alpha}{2k_\alpha} a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha} = \frac{r_\alpha - |r_\alpha|}{2k_\alpha} a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha} + \frac{|r_\alpha|}{2k_\alpha} a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha},$$

y designemos $\frac{r_\alpha + |r_\alpha|}{2} = r_\alpha^+ \geqslant 0$, $\frac{r_\alpha - |r_\alpha|}{2} = r_\alpha^- \leqslant 0$, $r_\alpha^+ = 0$ cuando $r_\alpha \leqslant 0$, $r_\alpha^- = 0$ cuando $r_\alpha \geqslant 0$. En tal caso, sustituyendo (31) en (30), tendremos

$$\Lambda y = \sum_{\alpha=1}^{2} \left(1 - \frac{h_\alpha |r_\alpha|}{2k_\alpha} \right) (a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha} + \frac{r_\alpha^+}{k_\alpha} a_\alpha^{(+1_\alpha)} y_{x_\alpha} + \frac{r_\alpha^-}{k_\alpha} a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}.$$

Pero

$$1 - \frac{h_\alpha |r_\alpha|}{2k_\alpha} = \frac{1}{1 + \frac{h_\alpha |r_\alpha|}{2k_\alpha}} + O(h_\alpha^2),$$

por eso se puede tomar el esquema en diferencias:

$$\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{1}{1 + \frac{h_\alpha |r_\alpha|}{2k_\alpha}} (a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha} + \frac{r_\alpha^+}{k_\alpha} a_\alpha^{(+1_\alpha)} y_{x_\alpha} + \frac{r_\alpha^-}{k_\alpha} a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha} = -f(x). \quad (32)$$

El error de aproximación de este esquema es $O(|h|^2)$ y, lo que es fácil comprobar, el principio del máximo para el mismo tiene lugar cualesquiera que sean h_α.

§ 3. Aproximación de las condiciones de conjugación y de frontera para las ecuaciones de segundo orden

En este párrafo se construyen las aproximaciones en diferencias de las condiciones de conjugación y de frontera, mencionadas en el § 1. Máxima atención se presta a la construcción de diferentes aproximaciones de las condiciones de frontera del segundo y del tercer géneros.

1. Aproximación de las condiciones de conjugación. Sea que el coeficiente de conductibilidad térmica $k_1(x)$ en la ecuación (4) del § 1

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_1(x_1, x_2)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_2(x_1, x_2)\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)=-f(x_1, x_2) \quad (1)$$

tiene una discontinuidad de primer género en la recta $x_1 = 0$ y se pide hallar la solución de dicha ecuación que satisface las condiciones de conjugación (9) del § 1

$$u(+0, x_2)-u(-0, x_2)=0,$$
$$k_1(+0, x_2)\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big|_{x_1=+0}-k_1(-0, x_2)\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big|_{x_1=-0}=0. \quad (2)$$

Para sencillez supondremos que el coeficiente $k_2(x)$ y el segundo miembro $f(x)$ de la ecuación (1) son continuos, siendo $x_1 = 0$. Construyamos la aproximación de las condiciones de conjugación (2). Sea la red tal que la línea de discontinuidad $x_1 = 0$ pasa por sus nodos. A base de la primera de las condiciones (2) la solución incógnita es continua cuando $x_1 = 0$, por esta razón los valores de la función de red la aproximarán a ésta cuando $x_1 = 0$.

Escribamos la aproximación elemental de la segunda de las condiciones (2)

$$a_1(h_1 x_2)\, y_{x_1} - a_1(0, x_2)\, y_{\bar{x}_1} = 0,$$

donde el coeficiente $a_1(x)$ se da, por ejemplo, mediante la correlación (3) del § 2, es decir,

$$a_1(x)=k_1\left(x_1-\frac{h_1}{2}, x_2\right),$$

y calculemos su error

$$\psi=a_1(h_1, x_2)\,u_{x_1}-a_1(0, x_2)\,u_{\bar{x}_1}=$$
$$=k_1(+0, x_2)\frac{\partial u}{\partial x_1}(+0, x_2)-k_1(-0, x_2)\frac{\partial u}{\partial x_1}(-0, x_2)+$$
$$+\frac{h_1}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_1\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)\Big|_{x_1=+0}+\frac{h_1}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_1\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)\Big|_{x_1=-0}+O(h_1^2). \quad (3)$$

Empleando la ecuación (1), expresemos $\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_1\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)$ a través de $\frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_2\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)$ y $f(x)$ y sustituyamos en (3):

$$\psi=-h_1\frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_2\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)-h_1f(x)+O(h_1^2)=$$
$$=-h_1(a_2u_{\bar{x}_2})_{x_2}-h_1f(x)+O(h_1^2+h_2^2).$$

Aquí se ve que el error de aproximación es la magnitud $O(h_1)$, pero, si la segunda de las condiciones de conjugación (2) se aproxima por las correlaciones

$$a_1(h_1, x_2)\,y_{x_1}-a_1(0, x_2)\,y_{\bar{x}_1}+h_1(a_2y_{\bar{x}_2})_{x_2}+h_1f(x)=0 \qquad (4)$$

el error de la nueva ecuación ya será $O(h_1^2+h_2^2)$. Al ser dividida en h_1 y transformada la ecuación (4) toma la forma

$$(a_1y_{\bar{x}_1})_{x_1}+(a_2y_{\bar{x}_2})_{x_2}=-f(x),$$

es decir, coincide por completo con las ecuaciones en diferencias (2) del § 2 para otros nodos que no tienen discontinuidad.

Sea que ahora se requiere hallar la solución de la ecuación (1) con el coeficiente $k_1(x)$ discontinuo en la recta $x_1=0$, siendo cumplidas las condiciones de conjugación (12) del § 1 y (13) del § 1, es decir,

$$\varkappa[u]\,|_{x_1=0}=k_1\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big|_{x_1=-0}, \quad \varkappa[u]\,|_{x_1=-0}=k_1\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big|_{x_1=+0}. \qquad (5)$$

Elijamos la red de la misma manera que en el caso anterior. Esta vez la solución de la ecuación (1), siendo $x_1=0$, tiene una discontinuidad de primer género y, por consiguiente, función de red $y(x)$, que aproxima la solución de la ecuación (1) cuando $x_1=0$, debe tener dos valores. Designemos estos valores mediante $y^+(0, x_2)$ e $y^-(0, x_2)$. Escribamos las aproximaciones elementales de las condiciones (5)

$$\varkappa(y^+-y^-)=a_1(0, x_2)\,y_{\bar{x}_1}, \quad \varkappa(y^+-y^-)=a_1(h_1, x_2)\,y_{x_1},$$

donde

$$y_{\bar{x}_1}=\frac{1}{h_1}[y^-(0, x_2)-y(-h_1, x_2)],$$
$$y_{x_1}=\frac{1}{h_1}[y(h_1, x_2)-y^+(0, x_2)],$$

y calculemos los errores de aproximación de estas ecuaciones. Para la primera ecuación el error de aproximación es igual a

$$\psi_1 = \varkappa [u] - a_1 (0, x_2) u_{\bar{x}_1} =$$
$$= \varkappa [u] - k_1 \frac{\partial u}{\partial x_1}\Big|_{x_1=-0} + \frac{h_1}{2} \frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_1 \frac{\partial u}{\partial x_1}\right)\Big|_{x_1=-0} + O(h_1^2) =$$
$$= -\frac{h_1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_2 \frac{\partial u}{\partial x_2}\right) + f\right)_{x_1=-0} + O(h_1^2) =$$
$$= -\frac{h_1}{2}\left[(a_2 u_{\bar{x}_2})_{x_2} + f\right]_{x_1=-0} + O(h_1^2 + h_2^2).$$

Similarmente se calcula el error de aproximación de la segunda ecuación

$$\psi_2 = \varkappa [u] - a_1 (h_1, x_2) u_{x_1} = \frac{h_1}{2}\left[(a_2 u_{\bar{x}_2})_{x_2} + f\right]_{x_1=+0} + O(h_1^2 + h_2^2).$$

De los desarrollos aportados se desprende que los errores de aproximación de ambas ecuaciones son las magnitudes $O(h_1)$, mas para las ecuaciones

$$\varkappa (y^+ - y^-) - a_1 y_{\bar{x}_1} + \frac{h_1}{2}(a_2 y^-_{\bar{x}_2})_{x_2} + \frac{h_1}{2} f = 0,$$
$$\varkappa (y^+ - y^-) - a_1^{(+1_1)} y_{x_1} - \frac{h_1}{2}(a_2 y^+_{\bar{x}_2})_{x_2} - \frac{h_1}{2} f = 0$$

los errores de aproximación serán $O(h_1^2 + h_2^2)$. Dividamos cada una de dichas ecuaciones en $h_1/2$:

$$\begin{aligned} \frac{\varkappa (y^+ - y^-) - a_1 y_{\bar{x}_1}}{0{,}5 h_1} + (a_2 y^-_{\bar{x}_2})_{x_2} &= -f, \\ \frac{a_1^{(+1_1)} y_{x_1} - \varkappa (y^+ - y^-)}{0{,}5 h_1} + (a_2 y^+_{\bar{x}_2})_{x_2} &= -f. \end{aligned} \qquad (6)$$

Las ecuaciones (6) se parecen a las ecuaciones (2) del § 2, empleadas para otros nodos de la red.

Si para la ecuación (1), siendo $x_1 = 0$, se prefijan las condiciones de conjugación (14) del § 1, entonces, lo mismo que en el caso de conjugación (2), se construye su aproximación de red

$$(a_1 y_{\bar{x}_1})_{x_1} + (a_2 y_{\bar{x}_2})_{x_2} = -f(0, x_2) - \frac{\alpha(x_2)}{h_1}. \qquad (7)$$

2. Aproximación de las condiciones de frontera para una ecuación que no tiene derivadas mixtas. Comencemos a estudiar las aproximaciones de las condiciones de frontera. Inicialmente examinemos las condiciones de frontera para la ecuación (1). Al principio construyamos las aproximaciones en diferencias para las condiciones de frontera del segundo género (16) del § 1 y del tercer género (17)

del § 1. Por ahora supondremos que la solución de la ecuación (1) se busca dentro del rectángulo $G = \{x = (x_1, x_2) \mid 0 < x_\alpha < l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$, en cuya frontera Γ ésta verifica las condiciones de frontera del tercer género (17) del § 1. El problema en cuestión, escrito detalladamente, tiene el siguiente aspecto:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_1 \frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_2 \frac{\partial u}{\partial x_2}\right) = -f(x), \tag{1}$$

$$\begin{aligned} k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} &= \varkappa_{-\alpha} u - g_{-\alpha}(x_\beta), \quad x_\alpha = 0, \\ -k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} &= \varkappa_{+\alpha} u - g_{+\alpha}(x_\beta), \quad x_\alpha = l_\alpha, \ \alpha, \beta = 1, 2, \ \alpha \neq \beta. \end{aligned} \tag{8}$$

Como se señaló en el capítulo I, la búsqueda de la solución de la ecuación (1), (8) equivale al hallazgo del elemento que aporta el mínimo a la siguiente funcional:

$$J(v) \equiv \int\limits_G \left[k_1(x)\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)^2 + k_2(x)\left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)^2 - 2f(x)\,v\right] dx +$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^{2} \int\limits_0^{l_\beta} \{[\varkappa_{-\alpha} v^2 - 2g_{-\alpha} v]|_{x_\alpha=0} + [\varkappa_{+\alpha} v^2 - 2g_{+\alpha} v]|_{x_\alpha=l_\alpha}\}\, dx_\beta. \tag{9}$$

El esquema en diferencias para el problema (1), (8) se construirá según el método de aproximación de la funcional (véase el § 3 del cap. II).En un recinto cerrado $\overline{G} = G \cup \Gamma$ introduzcamos una red uniforme rectangular $\overline{\omega} = \overline{\omega}_1 \times \overline{\omega}_2 = \{x = (x_1, x_2) \mid x_\alpha \in \overline{\omega}_\alpha, \alpha = 1, 2\}$, donde $\overline{\omega}_\alpha = \{x_\alpha \mid x_\alpha = i_\alpha h_\alpha, i_\alpha = 0, 1, \ldots, N_\alpha, h_\alpha = l_\alpha/N_\alpha$ es la red en el segmento $[0, l_\alpha]$. El conjunto de los nodos interiores de la red $\overline{\omega}$ lo designaremos a través de $\omega = \{x = (x_1, x_2) \mid x_\alpha \in \omega_\alpha, \alpha = 1, 2\}$, donde $\omega_\alpha = \{x_\alpha^{(i_\alpha)} \mid i_\alpha = 1, 2, \ldots, N_\alpha - 1\}$, a la vez el conjunto de los nodos de frontera, a través de $\gamma = \overline{\omega} \setminus \omega$. Sea, además, que

$$\omega_\alpha^+ = \{x_\alpha^{(i_\alpha)} \mid, i_\alpha = 1, 2, \ldots, N_\alpha\}, \ {}^+\omega_\alpha = \{x_\alpha^{(i_\alpha)} \mid, i_\alpha = 0, 1, \ldots, N_\alpha - 1\}.$$

Utilizaremos también la designación

$$\hbar_\alpha = \begin{cases} h_\alpha, & x_\alpha \in \omega_\alpha, \\ h_\alpha/2, & x_\alpha = 0, \ l_\alpha. \end{cases}$$

Sustituyamos por fórmulas de cuadratura todas las integrales que forman parte de la funcional (9). Para diferentes integrales emplearemos, hablando en general, fórmulas de cuadratura diversas.

En la integral doble

$$\int_G k_1(x)\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)^2 dx=\int_0^{l_1}\int_0^{l_2} k_1(x_1,\ x_2)\left(\frac{\partial v(x_1,\ x_2)}{\partial x_1}\right)^2 dx_1\,dx_2$$

sustituyamos la integral respecto a x_1 por la fórmula de cuadratura de los rectángulos centrales mientras que la integral respecto a x_2, por la fórmula de cuadratura de los trapecios

$$\int_G k_1(x)\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)^2 dx \sim$$

$$\sim \sum_{x_1\in\omega_1^+,\ x_2\in\bar{\omega}_2}\sum k_1\left(x_1-\frac{h_1}{2},\ x_2\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\left(x_1-\frac{h_1}{2},\ x_2\right)\right)^2 h_1\hbar_2. \qquad (10)$$

En la integral $\int_G k_2(x)\left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)^2 dx$ sustituyamos la integral respecto a x_1 por la fórmula de los trapecios y la integral con respecto a x_2, por la fórmula de los rectángulos centrales:

$$\int_G k_2(x)\left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)^2 dx \sim$$

$$\sim \sum_{x_1\in\bar{\omega}_1}\sum_{x_2\in\omega_2^+} k_2\left(x_1,\ x_2-\frac{h_2}{2}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\left(x_1,\ x_2-\frac{h_2}{2}\right)\right)^2 \hbar_1 h_2. \qquad (11)$$

En la última integral doble de (9) empleamos la fórmula de los trapecios para sustituir tanto la integral respecto a x_1 como la integral respecto a x_2:

$$\int_G [-2f(x)v]\,dx \sim -2\sum_{x_1\in\bar{\omega}_1}\sum_{x_2\in\bar{\omega}_2} f(x_1,\ x_2)\,v(x_1,\ x_2)\,\hbar_1\hbar_2. \qquad (12)$$

Todas las integrales a lo largo de la frontera se reemplazan por la fórmula de cuadratura de los trapecios:

$$\int_0^{l_\beta} [(\varkappa_{-\alpha}v^2-2g_{-\alpha}v)|_{x_\alpha=0}+(\varkappa_{+\alpha}v^2-2g_{+\alpha}v)|_{x_\alpha=l_\alpha}]\,dx_\beta \sim$$

$$\sim \sum_{\bar{\omega}_\beta} [(\varkappa_{-\alpha}v^2-2g_{-\alpha}v)|_{x_\alpha=0}+(\varkappa_{+\alpha}v^2-2g_{+\alpha}v)|_{x_\alpha=l_\alpha}]\,\hbar_\beta. \qquad (13)$$

Aproximamos en las fórmulas (10) y (11) las derivadas por las relaciones de diferencias:

$$\frac{\partial v}{\partial x_1}\left(x_1-\frac{h_1}{2},\ x_2\right)\sim v_{\bar{x}_1},\quad \frac{\partial v}{\partial x_2}\left(x_1,\ x_2-\frac{h_2}{2}\right)\sim v_{\bar{x}_2}. \qquad (14)$$

Ahora sustituyamos las aproximaciones (10) — (14) en la (9). Como resultado obtendremos la siguiente aproximación de la funcional (9):

$$J_h(v) = \sum_{\omega_1^+\times\bar\omega_2} a_1 v_{\bar x_1}^2 h_1\hbar_2 + \sum_{\bar\omega_1\times\omega_2^+} a_2 v_{\bar x_2}^2 \hbar_1 h_2 - 2\sum_{\bar\omega_1\times\bar\omega_2} f v\hbar_1\hbar_2 +$$
$$+\sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\bar\omega_\beta}[(\varkappa_{-\alpha}v^2-2g_{-\alpha}v)|_{x_\alpha=0}+(\varkappa_{+\alpha}v^2-2g_{+\alpha}v)|_{x_\alpha=l_\alpha}]\,\hbar_\beta, \quad (15)$$

donde $a_\alpha = k_\alpha^{(-0,5_\alpha)}$.

De esta forma, el problema de minimizar la funcional (9) está reducido al problema de minimizar la funcional aproximante (15). Pero $J_h(v)$ no es otra cosa sino una función de muchas variables $v(x_i)$, $x_i\in\bar\omega$. El mínimo de esta función se alcanza en el punto $v(x) = y(x)$, donde las derivadas primeras de ésta se reducen a cero.

Sea $x\in\omega$. Calculando la derivada de $J_h(v)$ respecto a $v(x)$, igualándola a cero y dividiendo luego la ecuación obtenida en $2h_1h_2$, tendremos

$$(a_1 y_{\bar x_1})_{x_1} + (a_2 y_{\bar x_2})_{x_2} = -f(x), \quad x\in\omega. \quad (16)$$

Hemos construido la aproximación en diferencias finitas de la ecuación (1). Esta aproximación coincide con la aproximación (2) — (3) del § 2, construida antes.

Sea que $x\in\gamma$, $x_1 = 0$, $x_2 \neq 0$, l_2; hemos escogido un punto situado en la frontera izquierda del rectángulo y no coincidente con ninguno de sus vértices. Efectuando los cálculos descritos más arriba y dividiendo en $2h_2$ la ecuación obtenida, obtendremos

$$a_1^{(+1_1)} y_{x_1} + \frac{h_1}{2}(a_2 y_{\bar x_2})_{x_2} = \varkappa_{-1} y - g_{-1} - \frac{h_1}{2} f, \; x_1 = 0, \; x_2 \neq 0, \; l_2. \quad (17)$$

Esta es la aproximación de una de las condiciones de frontera (8). Las condiciones de frontera para los lados restantes del rectángulo se aproximan de una manera análoga.

Por fin, sea que $x\in\gamma$, $x_1 = x_2 = 0$. Después de hacer unos cálculos hallamos que

$$\frac{h_2}{h_1+h_2} a_1^{(+1_1)} y_{x_1} + \frac{h_1}{h_1+h_2} a_2^{(+1_2)} y_{x_2} =$$
$$= \frac{h_2\varkappa_{-1}+h_1\varkappa_{-2}}{h_1+h_2} y - \frac{h_2 g_{-1}+h_1 g_{-2}}{h_1+h_2} + \frac{h_1h_2}{2(h_1+h_2)} f, \quad x_1 = x_2 = 0. \quad (18)$$

Para los demás vértices del rectángulo se escriben semejantes ecuaciones. La ecuación (18) puede considerarse como aproximación en diferencias de la combinación lineal de las condiciones de fronte-

ra (8) cuando $x_1=0$ y $x_2=0$. Las ecuaciones del tipo de (18) son necesarias para la clausura de los sistemas de ecuaciones (16), (17).

Acotemos el error de aproximación de la ecuación (17)

$$\psi=\left[a_1(h_1,\ x_2)\,u_{x_1}+\frac{h_1}{2}(a_2u_{\bar{x}_2})_{x_2}-\varkappa_{-1}u+g_{-1}+\frac{h_1}{2}f\right]\Big|_{x_1=0}=$$
$$=\left[k_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{h_1}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_1\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)+\frac{h_1}{2}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_2\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)-\varkappa_{-1}u+\right.$$
$$\left.+g_{-1}+\frac{h_1}{2}f+O(h_1^2+h_1h_2^2)\right].$$

Tomando en consideración la ecuación (1) y la condición (8), hallamos que $\psi(0,\ x_2)=O(|h|^2)$. Del mismo modo se comprueba que la ecuación (18) también tiene el error de aproximación $O(|h|^2)$.

Estudiemos otras condiciones de frontera para la ecuación (1). Sea que en el rectángulo G se busca la solución de la ecuación (1) que satisface en la frontera del rectángulo las condiciones de frontera del tipo de (23) — (27) del § 1.

Con más detalle, sea que

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_1\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_2\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)=-f(x),\qquad x\in G, \tag{1}$$

$$\begin{gathered}k_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\sigma_{-\alpha}(x_\beta)\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right)=\varkappa_{-\alpha}u-g_{-\alpha}(x_\beta),\quad x_\alpha=0,\\ -k_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\sigma_{+\alpha}(x_\beta)\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right)=\varkappa_{+\alpha}u-g_{+\alpha}(x_\beta),\quad x_\alpha=l_\alpha,\\ \alpha,\ \beta=1,\ 2,\quad \alpha\neq\beta,\end{gathered} \tag{19}$$

$$\begin{gathered}\left[\sigma_{-1}\frac{\partial u}{\partial x_2}+\sigma_{-2}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right]\Big|_{\substack{x_1=0\\x_2=0}}=0,\quad \left[\sigma_{+1}\frac{\partial u}{\partial x_2}+\sigma_{+2}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right]\Big|_{\substack{x_1=l_1\\x_2=l_2}}=0,\\ \left[\sigma_{-1}\frac{\partial u}{\partial x_2}-\sigma_{+2}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right]\Big|_{\substack{x_1=0\\x_2=l_2}}=0,\quad \left[\sigma_{+1}\frac{\partial u}{\partial x_2}-\sigma_{-2}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right]\Big|_{\substack{x_1=l_1\\x_2=0}}=0.\end{gathered} \tag{20}$$

Hallar la solución del problema (1), (19), (20) equivale a la búsqueda del elemento $u(x_1,\ x_2)$ que minimiza la funcional

$$J(v)=\int\limits_G\left[k_1(x)\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)^2+k_2(x)\left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)^2-2f(x)\,v\right]dx+$$
$$+\sum_{\alpha=1}^{2}\int\limits_0^{l_\beta}\left\{\left[\sigma_{-\alpha}\left(\frac{\partial v}{\partial x_\beta}\right)^2+\varkappa_{-\alpha}v^2-2g_{-\alpha}v\right]\Big|_{x_\alpha=0}+\right.$$
$$\left.+\left[\sigma_{+\alpha}\left(\frac{\partial v}{\partial x_\beta}\right)^2+\varkappa_{+\alpha}v^2-2g_{+\alpha}v\right]\Big|_{x_\alpha=l_\alpha}\right\}dx_\beta. \tag{21}$$

Esta funcional difiere de la funcional (9) sólo con la presencia de los sumandos aditivos $\sigma_{\pm\alpha}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x_\beta}\right)^2$ en las integrales a lo largo de la frontera.

Igual que al construir el esquema en diferencias para el problema (1), (8), aproximamos la funcional (21) sobre la red $\bar{\omega}$ sustituyendo las integrales por las fórmulas de cuadratura adecuadas y las derivadas por las razones en diferencias. Poniendo en la (21) las aproximaciones de

$$\sum_{\alpha=1}^{2}\int_{0}^{l_\beta}\left[\sigma_{-\alpha}\left(\frac{\partial v}{\partial x_\beta}\right)^2\Big|_{x_\alpha=0}+\sigma_{+\alpha}\left(\frac{\partial v}{\partial x_\beta}\right)^2\Big|_{x_\alpha=l_\alpha}\right]\sim$$
$$\sim\sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\omega_\beta^+}[\bar{\sigma}_{-\alpha}v_{\bar{x}_\beta}^2|_{x_\alpha=0}+\bar{\sigma}_{+\alpha}v_{\bar{x}_\beta}^2|_{x_\alpha=l_\alpha}]\,h_\beta,$$

donde $\bar{\sigma}_{\pm\alpha}=\sigma_{\pm\alpha}(x_\beta-h_\beta/2)$, obtendremos

$$J_h(v)=\sum_{\omega_1^+\times\bar{\omega}_2}a_1v_{\bar{x}_1}^2h_1\hbar_2+\sum_{\bar{\omega}_1\times\omega_2^+}a_2v_{\bar{x}_2}^2\hbar_1h_2-2\sum_{\bar{\omega}_1\times\bar{\omega}_2}fv\hbar_1\hbar_2+$$
$$+\sum_{\alpha=1}^{2}\left\{\sum_{\bar{\omega}_\beta}[(\varkappa_{-\alpha}v^2-2g_{-\alpha}v)|_{x_\alpha=0}+(\varkappa_{+\alpha}v^2-2g_{-\alpha}v)|_{x_\alpha=l_\alpha}]\,\hbar_\beta+\right.$$
$$\left.+\sum_{\omega_\beta^+}[\bar{\sigma}_{-\alpha}v_{\bar{x}_\beta}^2|_{x_\alpha=0}+\bar{\sigma}_{+\alpha}v_{\bar{x}_\beta}^2|_{x_\alpha=l_\alpha}]\,h_\beta\right\}.$$

Las aproximaciones de la ecuación (1) y de las condiciones de frontera (19), (20) se obtienen igualando a cero las derivadas de $J_h(v)$, con respecto a $v(x)$.

Escribamos las aproximaciones de las condiciones de frontera (19), (20). Sea que $x\in\gamma$, $x_1=0$, $x_2\neq 0$, l_2. Entonces,

$$a_1^{(+1_1)}y_{x_1}+\left[\left(\bar{\sigma}_{-1}+\frac{h_1}{2}a_2\right)y_{\bar{x}_2}\right]_{x_2}=$$
$$=\varkappa_{-1}y-g_{-1}-\frac{h_1}{2}f,\quad x_1=0,\quad x_2\neq 0,\quad l_2. \qquad (22)$$

Si $x_1=x_2=0$, en tal caso

$$\left(\bar{\sigma}_{-2}^{(+1_1)}+\frac{h_2}{2}a_1^{(+1_1)}\right)y_{x_1}+\left(\bar{\sigma}_{-1}^{(+1_2)}+\frac{h_1}{2}a_2^{(+1_2)}\right)y_{x_2}=$$
$$=\frac{h_2}{2}\varkappa_{-1}y+\frac{h_1}{2}\varkappa_{-2}y-\frac{h_2}{2}g_{-1}-\frac{h_1}{2}g_{-2}-\frac{h_1h_2}{4}f,\quad x_1=x_2=0. \qquad (23)$$

Del modo análogo se escriben las condiciones de frontera para las partes restantes de la frontera γ.

Empleando el desarrollo según la fórmula de Taylor, es fácil comprobar que, siendo suficientemente lisos la solución y los coeficientes del problema (1), (19), (20), las condiciones de frontera (20) y (23) tienen el error de aproximación $O(|h|^2)$.

3. Aproximación de las condiciones de frontera de tercer género para las ecuaciones de derivadas mixtas. Procederemos a la aproximación de las condiciones de frontera para la ecuación (10) del § 2. Consideraremos que la solución de la ecuación (10) del § 2 se busca en el rectángulo $G=\{x=(x_1,x_2)\mid 0\leqslant x_\alpha\leqslant l_\alpha,\ \alpha=1,2\}$, para cuya frontera se plantean las condiciones de frontera (18) del § 1.

Anotado detalladamente el problema en cuestión tiene el aspecto:

$$\sum_{\alpha,\,\beta=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right) = -f(x), \quad x \in G, \tag{24}$$

$$\begin{aligned} k_{\alpha\alpha}\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + k_{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta} &= \varkappa_{-\alpha}u - g_{-\alpha}, \quad x_\alpha = 0, \quad \alpha \neq \beta, \\ -k_{\alpha\alpha}\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} - k_{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta} &= \varkappa_{+\alpha}u - g_{+\alpha}, \quad x_\alpha = l_\alpha, \quad \alpha \neq \beta. \end{aligned} \tag{25}$$

Supondremos que la ecuación (24) es elíptica y, por esta razón los coeficientes de ésta satisfacen la condición (7) del § 1. La autoconjugación del problema (24), (25) no se supone, es decir, consideraremos que $k_{12}(x) \not\equiv k_{21}(x)$.

El esquema en diferencias para el problema (24), (25) construyámoslo según el método de aproximación de la identidad integral (véase el § 3 del cap. II).

Tengamos presente que se llama solución generalizada del problema (24), (25) la función $u(x) \in W_2^1(G)$ que para cualquiera que sea la función $v(x) \in W_2^1(G)$ satisface la identidad integral

$$\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\left[\sum_{\alpha,\,\beta=1}^{2} k_{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\frac{\partial v}{\partial x_\alpha} - fv\right]dx_1\,dx_2 + $$
$$+ \int_0^{l_1}\left[\varkappa_{-2}uv|_{x_2=0} + \varkappa_{+2}uv|_{x_2=l_2} - g_{-2}v|_{x_2=0} - g_{+2}v|_{x_2=l_2}\right]dx_1 + $$
$$+ \int_0^{l_2}\left[\varkappa_{-1}uv|_{x_1=0} + \varkappa_{+1}uv|_{x_1=l_1} - g_{-1}v|_{x_1=0} - g_{+1}v|_{x_1=l_1}\right]dx_2 = 0. \tag{26}$$

La identidad integral (26) se aproxima por la identidad sumadora sustituyendo las integrales por las fórmulas de cuadratura y las derivadas por razones en diferencias. Sustituyamos las integrales a lo largo de la frontera por fórmulas de cuadratura de los trapecios, las integrales de la función fv por fórmulas de los trapecios y las integrales de las funciones $k_{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\frac{\partial v}{\partial x_\alpha}$ por combinaciones lineales de fórmulas de todo género de los rectángulos derechos e izquierdos, o sea,

$$\iint_G k_{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\frac{\partial v}{\partial x_\alpha}\,dx_1\,dx_2 \sim$$
$$\sim \frac{1}{4}\Bigg\{\sum_{\omega_1^+\times\omega_2^+} k_{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\frac{\partial v}{\partial x_\alpha}h_1h_2 + \sum_{+\omega_1\times{}^+\omega_2} k_{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\frac{\partial v}{\partial x_\alpha}h_1h_2 +$$
$$+ \sum_{+\omega_1\times\omega_2^+} k_{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\frac{\partial v}{\partial x_\alpha}h_1h_2 + \sum_{\omega_1^+\times\omega_2^+} k_{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\frac{\partial v}{\partial x_\alpha}h_1h_2\Bigg\}.$$

Las derivadas en esta correlación reemplacémoslas por las correspondientes razones en diferencias.

Al efectuar dichas aproximaciones, la identidad integral (26) se convertirá en una identidad sumadora de la siguiente forma:

$$\frac{1}{4}\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}\Big[\sum_{\omega_1^+\times\omega_2^+} k_{\alpha\beta}u_{\bar{x}_\beta}v_{\bar{x}_\alpha}+\sum_{^+\omega_1\times^+\omega_2} k_{\alpha\beta}u_{x_\beta}v_{x_\alpha}\Big]h_1h_2+$$
$$+\frac{1}{4}\sum_{^+\omega_1\times\omega_2^+}[k_{11}u_{x_1}v_{x_1}+k_{12}u_{\bar{x}_2}v_{x_1}+k_{21}u_{x_1}v_{\bar{x}_2}+k_{22}u_{\bar{x}_2}v_{\bar{x}_2}]\,h_1h_2+$$
$$+\frac{1}{4}\sum_{\omega_1^+\times^+\omega_2}[k_{11}u_{\bar{x}_1}v_{\bar{x}_1}+k_{12}u_{x_2}v_{\bar{x}_1}+k_{21}u_{\bar{x}_1}v_{x_2}+k_{22}u_{x_2}v_{x_2}]\,h_1h_2-$$
$$-\sum_{\bar{\omega}_1\times\bar{\omega}_2} fv\hbar_1\hbar_2+\sum_{\bar{\omega}_1}[(\varkappa_{-2}u-g_{-2})\,v|_{x_2=0}+(\varkappa_{+2}u-g_{+2})\,v|_{x_2=l_2}]\,\hbar_1+$$
$$+\sum_{\bar{\omega}_2}[(\varkappa_{-1}u-g_{-1})\,v|_{x_1=0}+(\varkappa_{+1}u-g_{+1})\,v|_{x_1=l_1}]\,\hbar_2=0. \qquad (27)$$

Denominaremos solución aproximada del problema (24), (25) la función de red $y(x)$ dada en $\bar{\omega}$ y que para cualquiera que sea la función de red $v(x)$ incidada en la misma red $\bar{\omega}$ satisface la igualdad sumadora (27). Escogiendo la función de red v igual a la unidad en un nodo cualquiera de la red $\bar{\omega}$ e igual a cero en los nodos restantes, obtendremos la ecuación en diferencias en aquel nodo donde v es diferente de cero. Seleccionando de esta manera todos los nodos de la red $\bar{\omega}$, obtendremos el problema de red que aproxima el problema (24), (25). Con esto en los nodos interiores de la red ω obtenemos la aproximación de (24), coincidente con la aproximación construida anteriormente para esta ecuación (12) del § 2. En los nodos de frontera γ obtendremos la aproximación de las condiciones de frontera (25). Así, por ejemplo, siendo $x_1=0$, $x_2\neq 0$, l_2, las ecuaciones en diferencias tienen la forma

$$\frac{k_{11}+k_{11}^{(+1_1)}}{2}\,y_{x_1}+k_{12}y_{\overset{\circ}{x}_2}+\frac{h_1}{2}\Big\{\Big(\frac{k_{22}+k_{22}^{(-1_2)}}{2}\,y_{\bar{x}_2}\Big)_{x_2}+$$
$$+[(k_{21}y_{x_1})_{\overset{\circ}{x}_2}+(k_{12}y_{\overset{\circ}{x}_2})_{x_1}]\Big\}=\varkappa_{-1}y-g_{-1}-\frac{h_1}{2}f,\ x_1=0;\ x_2\neq 0,\ l_2, \qquad (28)$$

mas cuando $x_1=x_2=0$,

$$\frac{h_2}{h_1+h_2}\Big(\frac{k_{11}+k_{11}^{(+1_1)}}{2}\,y_{x_1}+k_{12}y_{x_2}-\varkappa_{-1}y+g_{-1}\Big)+$$
$$+\frac{h_1}{h_1+h_2}\Big(\frac{k_{22}+k_{22}^{(+1_2)}}{2}\,y_{x_2}+k_{21}y_{x_1}-\varkappa_{-2}y+g_{-2}\Big)+$$
$$+\frac{h_1h_2}{2(h_1+h_2)}[(k_{12}y_{x_2})_{x_1}+(k_{21}y_{x_1})_{x_2}+f]=0,\ \ x_1=x_2=0. \qquad (29)$$

Para los demás nodos de la frontera γ las ecuaciones se escriben de una manera análoga.

Señalemos que, siendo $k_{12} \equiv k_{21} \equiv 0$, las ecuaciones (28) coinciden con las ecuaciones (17) y las ecuaciones (29), con las ecuaciones (18), con la exactitud del método de calcular los coeficientes.

Es fácil comprobar que, si la solución y los coeficientes del problema (24), (25) son suficientemente lisos, entonces, las ecuaciones (28) aproximan las condiciones de frontera (25) con un error $O(h_1^2 + h_2^2)$, mientras que la ecuación (29) aproxima la combinación lineal de las condiciones de frontera en el punto angular sólo con el error $O(h_1 + h_2)$.

Investiguemos con mayor detalle el error de aproximación de la ecuación (29). Mediante la fórmula de Taylor hallamos que

$$\psi(0, 0) = \frac{h_2}{h_1+h_2}\left[k_{11}\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{h_1}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_{11}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + k_{12}\frac{\partial u}{\partial x_2} + \right.$$
$$\left. + \frac{h_2}{2}k_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \varkappa_{-1}u + g_{-1}\right] + \frac{h_1}{h_1+h_2}\left[k_{22}\frac{\partial u}{\partial x_2} + \right.$$
$$\left. + \frac{h_2}{2}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_{22}\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) + k_{21}\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{h_1}{2}k_{21}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \varkappa_{-2}u + g_{-2}\right] +$$
$$+ \frac{h_1 h_2}{2(h_1+h_2)}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_{12}\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_{21}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + f\right] + O(h_1^2 + h_2^2).$$

Tengamos en cuenta que u es la solución del problema (24), (25). Entonces,

$$\psi(0, 0) = \frac{h_2^2}{2(h_1+h_2)}k_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{h_1^2}{2(h_1+h_2)}k_{21}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + O(h_1^2 + h_2^2). \tag{30}$$

De aquí se deduce que, siendo diferente de cero aunque uno de los números $k_{12}(0, 0)$ y $k_{21}(0, 0)$, el error de aproximación en el punto $(0, 0)$ es $O(h_1 + h_2)$.

Mostremos que, variando los coeficientes de $y(0, 0)$ de (29), se puede componer una ecuación cuyo error de aproximación es $O(h_1^2 + h_2^2)$. Además hagamos una suposición complementaria

$$k_{12}(0, 0) + k_{21}(0, 0) \neq 0. \tag{31}$$

Transformemos la expresión del error de aproximación (30) eliminando en ésta las derivadas $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}u(0, 0)$ y $\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}u(0, 0)$. A base de (25) las condiciones de frontera, siendo $x_1 = x_2 = 0$, tienen la forma

$$\begin{aligned} k_{11}\frac{\partial u}{\partial x_1} + k_{12}\frac{\partial u}{\partial x_2} &= \varkappa_{-1}u - g_{-1}, \\ k_{21}\frac{\partial u}{\partial x_1} + k_{22}\frac{\partial u}{\partial x_2} &= \varkappa_{-2}u - g_{-2}. \end{aligned} \tag{32}$$

De aquí hallamos que, siendo $x_1 = x_2 = 0$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x_2} &= [k_{11}(\varkappa_{-2}u - g_{-2}) - k_{21}(\varkappa_{-1}u - g_1)]/(k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}),\\ \frac{\partial u}{\partial x_1} &= [k_{22}(\varkappa_{-1}u - g_{-1}) - k_{12}(\varkappa_{-2}u - g_{-2})/(k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}).\end{aligned} \tag{33}$$

El denominador de estas fórmulas no se anula, puesto que en virtud de la condición de elipticidad (7) del § 1 de la ecuación (24)

$$k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21} > (k_{12} - k_{21})^2/4. \tag{34}$$

Diferenciemos la primera de las condiciones (25) con respecto a x_2, siendo $\alpha = 1$, y con respecto a x_1, siendo $\alpha = 2$.

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_{11}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_{12}\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) = \frac{\partial}{\partial x_2}(\varkappa_{-1}u - g_{-1}),$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_{21}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_{22}\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) = \frac{\partial}{\partial x_1}(\varkappa_{-2}u - g_{-2}).$$

Reuniendo estas ecuaciones, para $x_1 = x_2 = 0$, y la ecuación (24), obtendremos un sistema de ecuaciones con respecto a las segundas derivadas $\partial^2 u/\partial x_1^2$, $\partial^2 u/\partial x_1\,\partial x_2$ y $\partial^2 u/\partial x_2^2$ en el punto (0, 0). La determinante del sistema es igual a

$$-(k_{12} + k_{21})(k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21})|_{x_1=x_2=0},$$

y en virtud de (31), (34) es diferente de cero. Esto permite expresar las segundas derivadas de la solución incógnita en el punto (0, 0) mediante la propia solución y su primeras derivadas en el mismo punto. Mas a base de (33) las primeras derivadas en el punto (0, 0) se expresan a través de la propia solución, y, por consiguiente, las segundas derivadas pueden representarse en la forma

$$k_{\beta\alpha}\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}(0,\ 0) = \mu_\alpha u(0,\ 0) - \nu_\alpha, \qquad \beta \neq \alpha.$$

Sustituyamos estos valores de las derivadas en (30)

$$\psi(0,\ 0) = \frac{h_2^2}{2(h_1 + h_2)}(\mu_2 u(0,\ 0) - \nu_2) + \\ + \frac{h_1^2}{2(h_1 + h_2)}(\mu_1 u(0,\ 0) - \nu_1) + O(h_1^2 + h_2^2).$$

De aquí se desprende que la ecuación en diferencias

$$\frac{h_2}{h_1 + h_2}\left(\frac{k_{11} + k_{11}^{(+1_1)}}{2}y_{x_1} + k_{12}y_{x_2} - \varkappa_1^* y + g_{-1}^*\right) + \\ + \frac{h_1}{h_1 + h_2}\left(\frac{k_{22} + k_{22}^{(+1_2)}}{2}y_{x_2} + k_{21}y_{x_1} - \varkappa_{-2}^* y + g_{-2}^*\right) + \\ + \frac{h_1 h_2}{2(h_1 + h_2)}[(k_{12}y_{x_2})_{x_1} + (k_{21}y_{x_1})_{x_2} + f] = 0,$$

donde

$$\varkappa^*_{-\alpha} = \varkappa_{-\alpha} + \frac{h_\beta}{2}\mu_\beta, \quad g^*_{-\alpha} = g_{-\alpha} + \frac{h_\beta}{2}\nu_\beta, \quad \beta \neq \alpha,$$

tiene el error de aproximación $O(h_1^2 + h_2^2)$.

Si la red $\overline{\omega}$ es no uniforme, según dicho método de aproximación de la identidad integral pueden construirse las siguientes análogas de las condiciones (28) y (29):

$$\frac{k_{\alpha\alpha} + k_{\alpha\alpha}^{(+1_\alpha)}}{2} y_{x_\alpha} + k_{\alpha\beta}\frac{y_{\hat{x}_\beta} + y_{\check{x}_\beta}}{2} + \frac{h_\alpha^+}{4}[(k_{\beta\beta}y_{x_\beta})_{\hat{x}_\beta} + (k_{\beta\beta}y_{x_\beta})_{\check{x}_\beta} +$$
$$+ (k_{\beta\alpha}y_{x_\alpha})_{\hat{x}_\beta} + (k_{\alpha\beta}y_{\check{x}_\beta})_{x_\alpha} + (k_{\beta\alpha}y_{x_\alpha})_{\check{x}_\beta} + (k_{\alpha\beta}y_{\hat{x}_\beta})_{x_\alpha}] =$$
$$= \varkappa_{-\alpha}y - g_{-\alpha} - \frac{h_\alpha^+}{2}f, \quad x_\alpha = 0, \ x_\beta \neq 0, \ l_\beta, \qquad (35)$$

$$\frac{h_2^+}{h_1^+ + h_2^+}\left(\frac{k_{11} + k_{11}^{(+1_1)}}{2} y_{x_1} + k_{12}y_{x_2} - \varkappa_{-1}y + g_{-1}\right) +$$
$$+ \frac{h_1^+}{h_1^+ + h_2^+}\left(\frac{k_{22} + k_{22}^{(+1_2)}}{2} y_{x_2} + k_{21}y_{x_1} - \varkappa_{-2}y + g_{-2}\right) +$$
$$+ \frac{h_1^+ h_2^+}{2(h_1^+ + h_2^+)}[(k_{12}y_{x_2})_{x_1} + (k_{21}y_{x_1})_{x_2} + f] = 0, \quad x_1 = x_2 = 0, \qquad (36)$$

etc.

4. Esquema en diferencias con orden elevado de aproximación para el problema de Neumann. En el rectángulo $G = \{x = (x_1, x_2) \mid 0 < x_\alpha < l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$ examinemos el segundo problema de contorno para la ecuación de Poisson (que es el problema de Neumann):

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = -f(x), \quad x \in G,$$
$$\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} = g_{-\alpha}(x_\beta), \qquad x_\alpha = 0, \qquad (37)$$

$$-\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} = -g_{+\alpha}(x_\beta), \qquad x_\alpha = l_\alpha, \ \beta \neq \alpha. \qquad (38)$$

El problema (37), (38) es un caso particular del problema (1), (8), que ya estudiamos, y se obtiene a partir de la última, siendo $k_1 \equiv k_2 \equiv 1$, $\varkappa_{\pm\alpha} = 0$.

Reescribamos el esquema en diferencias (16) — (18), que aproxima el problema (1), (8), con arreglo al problema (37), (38).

Introduzcamos la designación

$$\overline{\Lambda}_\alpha v = \begin{cases} \frac{2}{h_\alpha} v_{x_\alpha}, & x_\alpha = 0, \\ v_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}, & x_\alpha \neq 0, \ l_\alpha, \\ -\frac{2}{h_\alpha} v_{\bar{x}_\alpha}, & x_\alpha = l_\alpha. \end{cases} \quad (39)$$

Entonces, el esquema en diferencias que aproxima el problema (37), (38) se escribirá así:

$$(\overline{\Lambda}_1 + \overline{\Lambda}_2)\, y = -\varphi(x),$$

donde

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x), \ x \in \omega, \\ f(x) + \frac{2}{h_\alpha} g_{\mp\alpha}(x_\beta), \ x \in \bar{\omega}, \ x_\alpha = 0, \ l_\alpha, \ x_\beta \neq 0, \ l_\beta, \\ f(x) + \frac{2}{h_1} g_{\mp 1} + \frac{2}{h^2} g_{\mp 2}, \ x \in \bar{\omega}, \ x_1 = 0, \ l_1, \ x_2 = 0, \ l_2. \end{cases}$$

En el § 1 del cap. III fue construida la ecuación en diferencias (6,) (7)

$$\Lambda' y \equiv \Lambda_1 y + \Lambda_2 y + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \Lambda_1 \Lambda_2 y = -\varphi'(x), \ x \in \omega, \quad (40)$$

donde

$$\Lambda_\alpha v = v_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}, \quad \varphi' = f + \frac{1}{12}\left(h_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + h_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right),$$

la cual aproxima la ecuación de Poisson (37) con el error $O(h_1^4 + h_2^4)$.

Construyamos el esquema en diferencias que aproxima el problema (37), (38) con el error $O(h_1^4 + h_2^4)$. Por analogía a (40) buscaremos dicho esquema en la forma

$$\overline{\Lambda}' y \equiv \overline{\Lambda}_1 y + \overline{\Lambda}_2 y + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \overline{\Lambda}_1 \overline{\Lambda}_2 y = -\Phi'(x), \quad x \in \bar{\omega}, \quad (41)$$

donde el segundo miembro $\Phi'(x)$, siendo $x \in \bar{\omega}$, debe definirse de modo que el error de aproximación sea una magnitud del orden de pequeñez el que se exige.

Al suponer $\Phi' = \varphi'$, siendo $x \in \omega$, la ecuación (41) coincice con la ecuación (40) y, por consiguiente, aproximará el (37) con el error $O(h_1^4 + h_2^4)$.

Pues bien, nos resta prefijar Φ' en la frontera γ. Primeramente analicemos la ecuación (41), siendo $x_1 = 0$ y $x_2 \neq 0$, l_2. Teniendo en cuenta la designación (39), reescribamos la ecuación (41) en la siguiente forma:

$$y_{x_1} + \frac{h_1}{2} y_{\bar{x}_2 x_2} + \frac{h_1^2 + h_2^2}{2} y_{x_1 \bar{x}_2 x_2} + \frac{h_1}{2} \Phi' = 0. \quad (42)$$

Calculemos el error de aproximación ψ de esta ecuación

$$\psi = u_{x_1} + \frac{h_1}{2} u_{\bar{x}_1 x_1} + \frac{h_1^2 + h_1^2}{12} u_{x_1 \bar{x}_2 x_2} + \frac{h_1}{2} \Phi' =$$
$$= \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{h_1}{2} \Delta u + \frac{h_1}{2} \left(\frac{h_1^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{h_2^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \Delta u + \frac{h_1^2}{6} \frac{\partial}{\partial x_1} \Delta u +$$
$$+ \frac{h_2^2 - h_1^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{h_1}{2} \Phi' + O(h_1^4 + h_2^4).$$

De ésta, empleando la ecuación (37) y la condición de frontera (38), hallamos que

$$\psi = -g_{-1} - \frac{h_1}{2} f - \frac{h_1}{2} \left(\frac{h_1^2}{12} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{h_2^2}{12} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \right) - \frac{h_1^2}{6} \frac{\partial f}{\partial x_1} -$$
$$- \frac{h_2^2 - h_1^2}{12} \frac{\partial^2 g_{-1}}{\partial x_2^2} + \frac{h_1}{2} \Phi' + O(h_1^4 + h_2^4).$$

Por lo tanto, para que el error de aproximación de la ecuación (42) sea $O(h_1^4 + h_2^4)$, es suficiente suponer que

$$\Phi' = f + \frac{h_1^2}{12} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{h_2^2}{12} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{2}{h_1} \left(g_{-1} + \frac{h_1^2}{6} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{h_2^2 - h_1^2}{12} \frac{\partial^2 g_{-1}}{\partial x_2^2} \right) =$$
$$= \varphi' + \frac{2}{h_1} \left(g_{-1} + \frac{h_1^2}{6} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{h_2^2 - h_1^2}{12} \frac{\partial^2 g_{-1}}{\partial x_2^2} \right)$$

siendo $x_1 = 0$, $x_2 \neq 0, l_2$.

Determinemos ahora Φ', siendo $x_1 = x_2 = 0$. Tomando en consideración la designación (39), reescribamos el esquema (41) en la siguiente forma:

$$\frac{h_2}{h_1 + h_2} y_{x_1} + \frac{h_1}{h_1 + h_2} y_{x_2} + \frac{1}{6} \frac{h_1^2 + h_2^2}{h_1 + h_2} y_{x_1 x_2} + \frac{h_1 h_2}{2(h_1 + h_2)} \Phi' = 0.$$

Calculemos el error de aproximación de esta ecuación

$$\psi(0,\ 0) = \frac{h_2}{h_1 + h_2} u_{x_1} + \frac{h_1}{h_1 + h_2} u_{x_2} + \frac{1}{6} \frac{h_1^2 + h_2^2}{h_1 + h_2} u_{x_1 x_2} +$$
$$+ \frac{h_1 h_2}{2(h_1 + h_2)} \Phi' = \frac{h_1 h_2}{2(h_1 + h_2)} \left\{ \frac{2}{h_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{2}{h_2} \frac{\partial u}{\partial x_2} + \Delta u + \right.$$
$$+ \left(\frac{h_1^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{h_2^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \Delta u + \frac{h_1}{3} \frac{\partial}{\partial x_1} \Delta u + \frac{h_2^2 - h_1^2}{6 h_1} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \frac{\partial u}{\partial x_1} +$$
$$+ \frac{h_2}{3} \frac{\partial}{\partial x_2} \Delta u + \frac{h_1^2 - h_2^2}{6 h_2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{h_1 (h_1^2 + h_2^2)}{18 h_2} \frac{\partial^3}{\partial x_1^3} \frac{\partial u}{\partial x_2} +$$
$$+ \frac{h_2 (h_1^2 + h_2^2)}{18 h_1} \frac{\partial^3}{\partial x_2^3} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{h_1^2 + h_2^2}{3 h_1 h_2} \left(\sigma \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \right.$$
$$\left. \left. + (1 - \sigma) \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) + \Phi' + O(h_1^4 + h_2^4) \right\}.$$

Para transformar la expresión del error de aproximación hagamos uso de la ecuación (37) y las condiciones de frontera (38):

$$\psi(0,\ 0) = -\frac{h_1 h_2}{2(h_1+h_2)} \left\{ \varphi' + \frac{2}{h_1} \left(g_{-1} + \frac{h_1^2}{6} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{h_2^2 - h_1^2}{6} \frac{\partial^2 g_{-1}}{\partial x_2^2} \right) + \right.$$
$$+ \frac{2}{h_2} \left(g_{-2} + \frac{h_2^2}{6} \frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{h_1^2 - h_2^2}{12} \frac{\partial^2 g_{-2}}{\partial x_1^2} \right) +$$
$$+ \frac{4}{h_1 h_2} \left(\frac{h_2^2 (h_1^2 + h_2^2)}{72} \frac{\partial^3 g_{-1}}{\partial x_2^3} + \frac{h_1^2 (h_1^2 + h_2^2)}{72} \frac{\partial^3 g_{-2}}{\partial x_1^3} + \right.$$
$$\left. \left. + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \sigma \frac{\partial g_{-1}}{\partial x_2} + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} (1-\sigma) \frac{\partial g_{-2}}{\partial x_1} \right) - \Phi' + O(h_1^4 + h_2^4) \right\}.$$

De la forma de la última se desprende que el error será una magnitud del orden de $O\,(h_1^4 + h_2^4)$ al suponer que

$$\Phi'(0,\ 0) = \varphi'(0,\ 0) + \frac{2}{h_1} \left[g_{-1} + \frac{h_1}{6} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{h_2^2 - h_1^2}{12} \frac{\partial^2 g_{-1}}{\partial x_2^2} \right] +$$
$$+ \frac{2}{h_2} \left[g_{-2} + \frac{h_2^2}{6} \frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{h_1^2 - h_2^2}{12} \frac{\partial^2 g_{-2}}{\partial x_1^2} \right] +$$
$$+ \frac{4}{h_1 h_2} \left[\frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \sigma \frac{\partial g_{-1}}{\partial x_2} + \frac{h_2^2 (h_1^2 + h_2^2)}{72} \frac{\partial^3 g_{-1}}{\partial x_2^3} + \right.$$
$$\left. + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} (1-\sigma) \frac{\partial g_{-2}}{\partial x_1} + \frac{h_1^2 (h_1^2 + h_2^2)}{72} \frac{\partial^3 g_{-2}}{\partial x_1^3} \right], \quad \text{siendo} \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 0,$$

donde σ es el parámetro arbitrario cuya elección racional se aclara al investigar la velocidad de la convergencia del esquema (41).

Para las secciones restantes de la frontera γ el segundo miembro Φ' se determina del modo análogo.

5. **Aproximación de la condición de frontera de tercer género en la frontera curvilínea (red adaptada).** Hasta aquí construimos las aproximaciones de las condiciones de frontera, que tienen derivadas, siendo rectilínea y paralela a uno de los ejes de coordenadas la parte de la frontera donde se consideraba la condición de frontera. En este punto y en el posterior analizaremos una situación más general, cuando la sección de la frontera es curvilínea o rectilínea, pero no es paralela a ninguno de los ejes de coordenadas.

Sea que en un dominio determinado G se pide hallar la solución de la ecuación (37), la cual en la sección Γ_0 de la frontera G satisface la condición

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \varkappa u - g(x), \quad x \in \Gamma_0, \tag{43}$$

donde n es la dirección de la normal interior hacia Γ_0. Sea que Γ_0 se prefija por las ecuaciones

$$x_\alpha = \mu_\alpha(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \quad \alpha = 1,\ 2. \tag{44}$$

Para certeza supondremos que las derivadas $\mu'_\alpha(t)$ de las funciones $\mu_\alpha(t)$ son positivas y satisfacen las condiciones

$$0 < m\mu'_1(t) \leqslant \mu'_2(t) \leqslant M\mu'_1(t) < \infty, \qquad (45)$$

a la vez el dominio está situado a la derecha de la frontera (fig. 21).

Se dice que en el dominio G está introducida una *red adaptada* (red adaptada a la parte Γ_0 de la frontera), si para los valores de x_α, relacionados por las condiciones (44), los nodos de ésta se preestablecen por los puntos de intersección de las rectas

$$x_\alpha = \mu_\alpha(t_i),$$
$$\alpha = 1,\ 2, \quad i = 0,\ \pm 1,\ \ldots$$

(fig. 21).

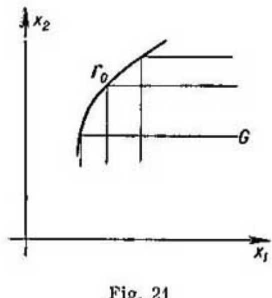


Fig. 21

Construyamos la aproximación de la condición de frontera (43) sobre la red adaptada. Reescribamos la (43) en la forma

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}\cos(n,\ x_1) + \frac{\partial u}{\partial x_2} \times$$
$$\times \cos(n,\ x_2) = \varkappa u - g(x)$$

y construyamos la aproximación elemental de esta condición

$$y_{x_1}\cos(n,\ x_1) + y_{x_2}\cos(n,\ x_2) = \varkappa y - g.$$

Calculemos el error de aproximación de la ecuación que acabamos de escribir

$$\psi = u_{x_1}\cos(n,\ x_1) + u_{x_2}\cos(n,\ x_2) - \varkappa u + g =$$
$$= \left[\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{h_1^+}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + O((h_1^+)^2)\right]\cos(n,\ x_1) +$$
$$+ \left[\frac{\partial u}{\partial x_2} - \frac{h_2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + O(h_2^2)\right]\cos(n,\ x_2) - \varkappa u + g =$$
$$= \frac{h_1^+}{2}\cos(n,\ x_1)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{h_2}{2}\cos(n,\ x_2)\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + O((h_1^+)^2 + h_2^2).$$

Transformemos la expresión del error de aproximación. Consideraremos que el paso h_1^+ está prefijado, pero el paso h_2 lo determinaremos partiendo de la condición

$$\frac{h_1^+}{2}\cos(n,\ x_1) = -\frac{h_2}{2}\cos(n,\ x_2) + O((h_1^+)^2 + h_2^2).$$

Señalando que en el caso que examinamos

$$\cos(n,\ x_1) = \frac{\mu'_2}{\sqrt{\mu_1'^2 + \mu_2'^2}}, \qquad \cos(n,\ x_2) = -\frac{\mu'_1}{\sqrt{\mu_1'^2 + \mu_2'^2}},$$

la condición para elegir h_2 puede escribirse de la manera siguiente:

$$(h_1^{\dagger}\mu_2' - h_2\mu_1')/\left(2\sqrt{\mu_1'^2+\mu_2'^2}\right) = O\left((h_1^{\dagger})^2 + h_2^2\right).$$

Teniendo en cuenta las condiciones (45) averiguamos que dicha condición se cumplirá al suponer que

$$h_2 = h_1^{\dagger}\frac{\mu_2'}{\mu_1'} + O\left((h_1^{\dagger})^2\right). \tag{46}$$

Sea que la suposición (46) se verifica. Entonces, tomando en consideración (37), el error de aproximación se transforma del siguiente modo

$$\psi = \frac{h_1^{\dagger}}{2}\frac{\mu_2'}{\sqrt{\mu_1'^2+\mu_2'^2}}\Delta u + O\left((h_1^{\dagger})^2 + h_2^2\right) =$$
$$= -\frac{h_1^{\dagger}}{2}\frac{\mu_2'}{\sqrt{\mu_1'^2+\mu_2'^2}} f + O\left((h_1^{\dagger})^2 + h_2^2\right).$$

De aquí se desprende que la condición de frontera en diferencias

$$y_{x_1}\cos(n,\ x_1) + y_{\bar{x}_2}\cos(n,\ x_2) = \varkappa y - \left(g + \frac{h_1^{\dagger}\mu_2'}{2\sqrt{\mu_1'^2+\mu_2'^2}}\right) \tag{47}$$

aproxima la condición (43) con el error $O\left((h_1^{\dagger})^2 + h_2^2\right)$.

§ 4. Problemas de contorno para el sistema de ecuaciones de la teoría de clasticidad

En el presente párrafo se aducirán los planteamientos de los problemas fundamentales de la teoría de elasticidad del cuerpo isótropo para el caso de deformación plana. Estarán construidas las ecuaciones en diferencias que aproximan las ecuaciones del equilibrio y las condiciones de frontera que definen las mismas. Todo el análisis se hará con respecto a un rectángulo de lados paralelos a los ejes de coordenadas.

1. Problemas planos fundamentales de la teoría de elasticidad. En el § 1 del cap. I se mostró que el sistema de ecuaciones de equilibrio de un sólido elástico isótropo homogéneo para el caso de la deformación plana tiene la forma (31). Si el cuerpo *no* es homogéneo, pero la deformación permanece plana, en este caso a base del sistema (30) del § 1 del cap. I las ecuaciones de equilibrio tomarán la forma

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left((2\mu+\lambda)\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\mu\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\lambda\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\mu\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) + F_1 = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\lambda\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\mu\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\mu\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left((2\mu+\lambda)\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) + F_2 = 0.$$

Tengamos presente que las funciones incógnitas $u_1(x)$ y $u_2(x)$ del sistema (1) significan los desplazamientos de un punto a lo largo de los ejes Ox_1 y Ox_2 respectivamente, mientras que $\lambda(x) > 0$ y $\mu(x) > 0$ son los coeficientes de Lamé, los cuales caracterizan las propiedades elásticas de un sólido.

Para el sistema de ecuaciones (1) puede plantearse el problema de buscar el vector $u = (u_1, u_2)$ bajo la condición de que en la frontera Γ del dominio se prefija el vector u (éste es *el primer problema de contorno*)

$$u_1 = g_1, \quad u_2 = g_2, \quad \text{siendo} \quad x \in \Gamma. \tag{2}$$

Si en la frontera del dominio se preestablecen tensiones, en tal caso tenemos *el segundo problema de contorno*. Las condiciones de frontera, entonces, de acuerdo con (28), (29) y (32) del § 1 del cap. I, tendrán la forma

$$\begin{gathered}\left[(\lambda+2\mu)\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\lambda\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right]\cos(n,\ x_1)+\mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)\cos(n,\ x_2)=-f_1,\\ \mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)\cos(n,\ x_1)+\left(\lambda\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)\cos(n,\ x_2)=-f_2,\end{gathered} \tag{3}$$

donde n es la dirección de la normal interior hacia la frontera Γ.

Si en la frontera del dominio se dan la componente normal del vector de desplazamiento y la componente tangencial del vector de tensión, entonces, tenemos *el tercer problema de contorno*

$$\begin{aligned}&u_1\cos(n,\ x_1)+u_2\cos(n,\ x_2)=g,\\ &\mu\left[2\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}-\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)\cos(n,\ x_1)\cos(n,\ x_2)+\right.\\ &\qquad\left.+\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)(\cos^2(n,\ x_1)-\cos^2(n,\ x_2))\right]=-f.\end{aligned} \tag{4}$$

Para el sistema (1) se plantea con frecuencia un problema mixto, en el que se prefijan las condiciones de un tipo para unas partes de la frontera mientras que para otras, las condiciones de otro tipo.

Escribamos las condiciones (3), (4) para el caso en que la frontera es paralela al eje Ox_1 y el dominio está situado más arriba de éste:

$$\begin{gathered}\mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)=-f_1(x,\ 0),\\ \lambda\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial u_2}{\partial x_2}=-f_2(x_1,\ 0),\end{gathered} \tag{5}$$

$$u_2=g(x_1,\ 0),\quad \mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)=-f(x_1,\ 0). \tag{6}$$

2. Aproximación en diferencias del problema (1), (3). Construyamos el esquema en diferencias que aproxima el sistema de ecuaciones (1) con las condiciones de frontera (3) para el caso en que el dominio es un rectángulo de lados paralelos a los ejes de coordenadas. La construcción del esquema indicado se realizará según el método de Ritz.

Sea $G = \{x = (x_1, x_2) \mid 0 < x_\alpha < l_\alpha,\ \alpha = 1, 2\}$ el dominio y sea Γ la frontera de G. Es fácil comprobar que la solución del problema (1), (3) en el dominio G, si ésta existe, aporta el mínimo a la siguiente funcional:

$$J(u) = W(u) - \int_0^{l_1}\int_0^{l_2} (F_1u_1 + F_2u_2)\, dx_1\, dx_2 -$$
$$- \int_0^{l_1} [f_1(x_1, 0)\, u_1 + f_1(x_1, l_2)\, u_1 + f_2(x_1, 0)\, u_2 + f_2(x_1, l_2)\, u_2]\, dx_1 -$$
$$- \int_0^{l_2} [f_1(0, x_2)\, u_1 + f_1(l_1, x_2)\, u_1 + f_2(0, x_2)\, u_2 + f_2(l_1, x_2)\, u_2]\, dx_2, \quad (7)$$

donde

$$W(u) = \frac{1}{2}\int_0^{l_1}\int_0^{l_2} \left\{2\mu\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2\right] + \right.$$
$$\left. + \lambda\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2 + \mu\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2\right\} dx_1\, dx_2 \quad (8)$$

es la energía de deformación elástica del sólido.

Se denomina solución del problema (1), (3) el vector $u = (u_1, u_2)$, $u_\alpha \in W_2^1(G)$, el cual minimiza la funcional (7).

En concordancia con el método de Ritz aproximamos el espacio $W_2^1(G)$ por el subespacio de dimensión finita V y llamaremos solución aproximada del problema (1), (3) el vector $\bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2)$, $\bar{u}_\alpha \in V$, el cual minimiza la funcional (7) en el subespacio V.

Construyamos el subespacio de dimensión finita que aproxima, usando el mismo procedimiento que utilizábamos en el p. 2 del § 2 al emplear el método de Bubnov — Galerkin. A saber, sea $\bar{\omega} = \{x = x_i = (x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}) \mid x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h_\alpha,\ h_\alpha = l_\alpha / N_\alpha,\ i_\alpha = 0, 1, \ldots, N_\alpha;\ \alpha = 1, 2\}$ una red uniforme rectangular en el dominio $\bar{G}$. Dividamos el dominio $\bar{G}$ en casillas rectangulares de lados h_1 y h_2 y de vértices en los nodos de la red $\bar{\omega}$. Sea que $G[i] = \{x = (x_1, x_2) \mid x_\alpha^{(i_\alpha)} \leqslant x_\alpha \leqslant x_\alpha^{(i_\alpha+1)}\}$. Luego dividamos cada una de las casillas $G[i]$ en dos triángulos mediante la recta que pasa por

sus vértices opuestos $(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)})$, $(x_1^{(i_1+1)}, x_2^{(i_2+1)})$. Designemos los triángulos izquierdos superiores a través de $\Delta^+[i]$ y los derechos inferiores, a través de $\Delta^-[i]$. (La división del dominio $\overline{G}$ en triángulos se muestra en la fig. 22.) Como subespacio V del espacio $W_2^1(G)$ tomemos el espacio de las funciones que son continuas en el dominio $\overline{G}$ y lineales sobre cada uno de los triángulos $\Delta^\pm[i]$.

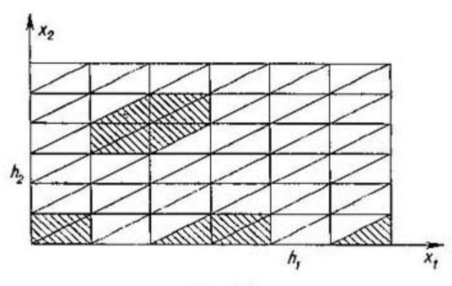


Fig. 22

Buscaremos la solución aproximada del problema (1), (3), la cual tendrá la forma

$$\overline{u}(x) = (\overline{u}_1(x), \overline{u}_2(x)),$$

$$\overline{u}_\alpha(x) = \sum_{j_1=0}^{N_1} \sum_{j_2=0}^{N_2} y_{\alpha j_1 j_2} \eta_{j_1 j_2}(x), \quad \alpha = 1, 2, \quad x \in \overline{G}, \tag{9}$$

donde $\{\eta_j(x)\}$, $j = (j_1, j_2)$ es la base del subespacio V.

Para utilizar (9) preestablecemos la base en el subespacio V. Es evidente que en calidad de base en el subespacio V puede tomarse el conjunto de las funciones continuas en el dominio G y lineales sobre cada uno de los triángulos $\Delta^\pm[i]$, además cada una de dichas funciones difiere de cero únicamente en un solo nodo de la red $\overline{\omega}$. Consideraremos que $\eta_i(x_i) = 1$. Con la base eligida los coeficientes y_{α_j} de (9) tienen el significado de los valores de la solución aproximada en los nodos de la red $\overline{\omega}$.

Está claro que cada una de las funciones de base $\eta_i(x)$ es diferente de cero sólo en uno de los recintos sombreados de la fig. 22. La fórmula que define la función de coordenadas $\eta_i(x)$ para $0 < i_\alpha < N_\alpha$, $\alpha = 1, 2$ (que es la función correspondiente a un nodo interior de la red $\overline{\omega}$) tiene la forma (16) del § 2, donde en virtud de la uniformidad de la red $\overline{\omega}$ debe suponerse que $h_\alpha^+ = h_\alpha$. Si un subíndice o los dos de la función $\eta_{i_1 i_2}$ toman los valores iguales a 0 ó N_α,

entonces la fórmula para ésta es fácil de escribir partiendo de la correlación (16) del § 2. La fig. 23 representa las funciones $\eta_l(x)$ en los recintos donde éstas son diferentes de cero.

Hallemos las ecuaciones que se verifican por los parámetros desconocidos $y_{\alpha j}$ de (9). Con este objeto sustituyamos $\bar{u}(x)$ de (9) en (7), (8). Como resultado obtendremos la función $J(\bar{u})$ dependiente de $2(N_1+1)(N_2+1)$ variables $y_{\alpha l}$.

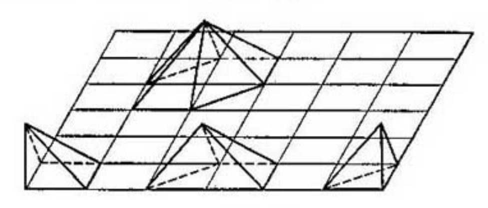


Fig. 23

Diferenciando $J(\bar{u})$ con respecto a estas variables e igualando a cero las primeras derivadas, obtendremos el sistema de ecuaciones lineales algebraicas mediante el que se determinan los parámetros $y_{\alpha i_1 i_2}$. Dicho sistema tiene el aspecto

$$\sum_{j_1=0}^{N_1}\sum_{j_2=0}^{N_2}\sum_{\beta=1}^{2} A_{\alpha i_1 i_2}^{\beta j_1 j_2} y_{\beta j_1 j_2} = \varphi_{\alpha i_1 i_2}, \qquad i_\alpha = 0, \ldots, N_\alpha,\ \alpha = 1, 2, \tag{10}$$

donde

$$\begin{gathered} A_{\alpha i_1 i_2}^{\alpha j_1 j_2} = \int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\left[(\lambda+2\mu)\frac{\partial\eta_{j_1 j_2}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\eta_{i_1 i_2}}{\partial x_\alpha} + \mu\frac{\partial\eta_{j_1 j_2}}{\partial x_\beta}\frac{\partial\eta_{i_1 i_2}}{\partial x_\beta}\right] dx_1\,dx_2, \\ A_{\alpha i_1 i_2}^{\beta j_1 j_2} = \int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\left[\lambda\frac{\partial\eta_{j_1 j_2}}{\partial x_\beta}\frac{\partial\eta_{i_1 i_2}}{\partial x_\alpha} + \mu\frac{\partial\eta_{j_1 j_2}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\eta_{i_1 i_2}}{\partial x_\beta}\right] dx_1\,dx_2, \\ \alpha, \beta = 1, 2, \quad \alpha \neq \beta, \end{gathered} \tag{11}$$

$$\varphi_{\alpha i_1 i_2} = \int_0^{l_1}\int_0^{l_2} F_\alpha \eta_{i_1 i_2}\,dx_1\,dx_2 + \int_\Gamma f_\alpha \eta_{i_1 i_2}\,ds. \tag{12}$$

Calculemos los coeficientes $A_{\alpha i}^{\beta j}$, partiendo de las derivadas $\partial\eta_l/\partial x_\alpha$, las cuales se definen por las correlaciones (20) del § 2, siendo $h_\alpha^+ = h_\alpha$. De las correlaciones (11) y (20) del § 2 se desprende que $A_{\alpha i_1 i_2}^{\beta j_1 j_2} = 0$, siendo $|i_1 - j_1| > 1$ ó $|i_2 - j_2| > 1$. Además, $A_{\alpha i_1 i_2}^{\beta i_1 - 1, i_2 + 1} = A_{\alpha i_1 i_2}^{\beta i_1 + 1, i_2 - 1} = 0$. Por lo tanto pueden diferir de cero sólo los siguientes coeficientes

$$A_{\alpha i_1 i_2}^{\beta i_1 i_2},\quad A_{\alpha i_1 i_2}^{\beta i_1 + 1, i_2},\quad A_{\alpha i_1 i_2}^{\beta i_1, i_2 + 1},\quad A_{\alpha i_1 i_2}^{\beta i_1, i_2 - 1},\quad A_{\alpha i_1 i_2}^{\beta i_1 - 1, i_2 - 1},\quad A_{\alpha i_1 i_2}^{\beta i_1 + 1, i_2 + 1}$$

Supongamos que los coeficientes de Lamé λ y μ son constantes. Inicialmente calculemos $A_{\alpha i_1 i_2}^{\beta j_1 j_2}$, siendo $i_\alpha \neq 0$, N_α, $\alpha = 1, 2$.

$$A_{\alpha i_1 i_2}^{\alpha i_1 i_2} = 2\left[\frac{h_\beta}{h_\alpha}(\lambda+2\mu)+\frac{h_\alpha}{h_\beta}\mu\right], \quad \alpha \neq \beta,$$

$$A_{1 i_1 i_2}^{1 i_1 - 1,\, i_2} = A_{1 i_1 i_2}^{1 i_1 + 1,\, i_2} = -\frac{h_2}{h_1}(\lambda+2\mu),$$

$$A_{1 i_1 i_2}^{1 i_1 i_2 + 1} = A_{1 i_1 i_2}^{1 i_1,\, i_2 - 1} = -\frac{h_1}{h_2}\mu,$$

$$A_{2 i_1 i_2}^{2 i_1 - 1,\, i_2} = A_{2 i_1 i_2}^{2 i_1 + 1,\, i_2} = -\frac{h_2}{h_1}\mu,$$

$$A_{2 i_1 i_2}^{2 i_1,\, i_2 - 1} = A_{2 i_1 i_2}^{2 i_1,\, i_2 + 1} = -\frac{h_1}{h_2}(\lambda+2\mu), \tag{13}$$

$$A_{\alpha i_1 i_2}^{\alpha i_1 + 1,\, i_2 + 1} = A_{\alpha i_1 i_2}^{\alpha i_1 - 1,\, i_2 - 1} = 0, \quad A_{\alpha i_1 i_2}^{\beta i_1 i_2} = -(\lambda+\mu),$$

$$A_{\alpha i_1 i_2}^{\beta i_1 - 1,\, i_2} = A_{\alpha i_1 i_2}^{\beta i_1 + 1,\, i_2} = A_{\alpha i_1 i_2}^{\beta i_1,\, i_2 - 1} = A_{\alpha i_1 i_2}^{\beta i_1,\, i_2 + 1} = \frac{\lambda+\mu}{2},$$

$$A_{\alpha i_1 i_2}^{\beta i_1 + 1,\, i_2 + 1} = A_{\alpha i_1 i_2}^{\beta i_1 - 1,\, i_2 - 1} = \frac{(\lambda+\mu)}{2}.$$

Ahora calculemos $A_{\alpha i_1 0}^{\beta j_1 j_2}$, siendo $i_1 \neq 0$, N_1. En virtud de la observación hecha anteriormente pueden diferir de cero sólo los siguientes coeficientes:

$$A_{\alpha i_1 0}^{\beta i_1 0}, \quad A_{\alpha i_1 0}^{\beta i_1 1}, \quad A_{\alpha i_1 0}^{\beta i_1 + 1,\, 0}, \quad A_{\alpha i_1 0}^{\beta i_1 - 1,\, 0}, \quad A_{\alpha i_1 0}^{\beta i_1 + 1,\, 1},$$

los cuales son iguales, respectivamente, a

$$A_{\alpha i_1 0}^{\alpha i_1 0} = \frac{h_\beta}{h_\alpha}(\lambda+2\mu)+\frac{h_\alpha}{h_\beta}\mu, \quad \alpha \neq \beta,$$

$$A_{1 i_1 0}^{1 i_1 1} = -\frac{h_1}{h_2}\mu,$$

$$A_{1 i_1 0}^{1 i_1 + 1,\, 0} = A_{1 i_1 0}^{1 i_1 - 1,\, 0} = -\frac{h_2}{2h_1}(\lambda+2\mu),$$

$$A_{2 i_1 0}^{2 i_1 1} = -\frac{h_1}{h_2}(\lambda+2\mu),$$

$$A_{2 i_1 0}^{2 i_1 + 1,\, 0} = A_{2 i_1 0}^{2 i_1 - 1,\, 0} = -\frac{h_2}{2h_1}\mu,$$

$$A_{\alpha i_1 0}^{\alpha i_1 + 1,\, 1} = 0, \tag{14}$$

$$A_{\alpha i_1 0}^{\beta i_1 0} = A_{\alpha i_1 0}^{\beta i_1 + 1,\, 1} = -\frac{\lambda+\mu}{2}, \quad \alpha \neq \beta,$$

$$A_{\alpha i_1 0}^{\beta i_1 1} = \frac{\lambda+\mu}{2}, \quad \alpha \neq \beta,$$

$$A_{1 i_1 0}^{2 i_1 + 1,\, 0} = A_{2 i_1 0}^{1 i_1 - 1,\, 0} = \frac{\lambda}{2}, \qquad A_{1 i_1 0}^{2 i_1 - 1,\, 0} = A_{2 i_1 0}^{1 i_1 + 1,\, 0} = \frac{\mu}{2}.$$

Por fin, calculemos los coeficientes $A_{\alpha i_1 i_2}^{\beta j_1 j_2}$, que entran en las ecuaciones correspondientes a las figuras inferiores izquierda y derecha.

Para el punto (0, 0) tenemos

$$\begin{aligned}
&A_{\alpha 00}^{\alpha 00}=\frac{1}{2}\left(\frac{h_\beta}{h_\alpha}(2\mu+\lambda)+\frac{h_\alpha}{h_\beta}\mu\right), \quad \alpha\neq\beta,\\
&A_{100}^{110}=-\frac{h_2}{h_1}\frac{\lambda+2\mu}{2},\\
&A_{100}^{101}=-\frac{h_1}{h_2}\frac{\mu}{2}, \quad A_{200}^{210}=-\frac{h_2}{h_1}\frac{\mu}{2},\\
&A_{200}^{201}=-\frac{h_1}{h_2}\frac{\lambda+2\mu}{2}, \quad A_{\alpha 11}^{\alpha 11}=0, \quad A_{\alpha 00}^{\beta 00}=0, \quad \alpha\neq\beta,\\
&A_{100}^{210}=A_{200}^{101}=\frac{\lambda}{2}, \quad A_{100}^{201}=A_{200}^{110}=\frac{\mu}{2},\\
&A_{\alpha 00}^{\beta 11}=-\frac{\lambda+\mu}{2}, \quad \alpha\neq\beta,
\end{aligned} \tag{15}$$

Para el punto $(l_1, 0)$ tenemos

$$\begin{aligned}
&A_{\alpha N_1 0}^{\alpha N_1 0}=\frac{h_\beta}{h_\alpha}\frac{\lambda+2\mu}{2}+\frac{h_\alpha}{h_\beta}\frac{\mu}{2},\\
&A_{1N_1 0}^{1N_1-1,\,0}=-\frac{h_2}{h_1}\frac{\lambda+2\mu}{2},\\
&A_{1N_1 0}^{1N_1 1}=-\frac{h_1}{h_2}\mu,\\
&A_{2N_1 0}^{2N_1-1,\,0}=-\frac{h_2}{h_1}\frac{\mu}{2},\\
&A_{2N_1 0}^{2N_1 1}=-\frac{h_1}{h_2}\frac{\lambda+2\mu}{2},\\
&A_{\alpha N_1 0}^{\beta N_1 0}=-\frac{\lambda+\mu}{2}, \quad \alpha\neq\beta,\\
&A_{1N_1 0}^{2N_1-1,\,0}=A_{2N_1 0}^{1N_1,\,1}=\frac{\mu}{2},\\
&A_{1N_1 0}^{2N_1 1}=A_{2N_1 0}^{1N_1-1,\,0}=\frac{\lambda}{2}.
\end{aligned} \tag{16}$$

Sustituyendo ahora (13) — (16) en (11) y efectuando unas transformaciones, obtendremos:

las aproximaciones de las ecuaciones

$$\begin{aligned}
&(\lambda+2\mu)(y_1)_{\bar{x}_1 x_1}+\mu(y_1)_{\bar{x}_2 x_2}+\frac{\lambda+\mu}{2}\left[(y_2)_{x_1 x_2}+(y_2)_{\bar{x}_1\bar{x}_2}\right]=\\
&\qquad\qquad=-\frac{1}{h_1 h_2}\varphi_1, \quad (x_1, x_2)\in\omega,\\
&\frac{\lambda+\mu}{2}\left[(y_1)_{x_1 x_2}+(y_1)_{\bar{x}_1\bar{x}_2}\right]+\mu(y_2)_{\bar{x}_1 x_1}+(\lambda+2\mu)(y_2)_{\bar{x}_2 x_2}=\\
&\qquad\qquad=-\frac{1}{h_1 h_2}\varphi_2, \quad (x_1, x_2)\in\omega,
\end{aligned} \tag{17}$$

las aproximaciones de las condiciones de frontera

$$\mu\,[(y_1)_{x_2}+(y_2)_{\overset{\circ}{x}_1}]+\frac{h_2}{2}\,[(\lambda+2\mu)\,(y_1)_{\bar{x}_1x_1}+(\lambda+\mu)\,(y_2)_{x_1x_2}]=-\frac{\varphi_1}{h_1},$$

$$\lambda\,(y_1)_{\overset{\circ}{x}_1}+(\lambda+2\mu)\,(y_2)_{x_2}+\frac{h_2}{2}[(\lambda+\mu)\,(y_1)_{x_1x_2}+\mu\,(y_2)_{\bar{x}_1x_1}]=-\frac{\varphi_2}{h_1}, \qquad (18)$$

siendo $x\in\overline{\omega},\ x_2=0,\ x_1\neq 0,\ l_1,$

las aproximaciones de las condiciones de frontera en los vértices de los ángulos

$$\frac{h_2}{h_1+h_2}\,[(\lambda+2\mu)\,(y_1)_{x_1}+\lambda\,(y_2)_{x_2}]+$$
$$+\frac{h_1}{h_1+h_2}\,\mu\,[(y_1)_{x_2}+(y_2)_{x_1}]+\frac{h_1h_2}{h_1+h_2}\,(\lambda+\mu)\,(y_2)_{x_1x_2}=-\frac{2}{h_1+h_2}\,\varphi_1,$$

$$\frac{h_1}{h_1+h_2}\,[\lambda\,(y_1)_{x_1}+(\lambda+2\mu)\,(y_2)_{x_2}]+ \qquad (19)$$
$$+\frac{h_2}{h_1+h_2}\,\mu\,[(y_1)_{x_2}+(y_2)_{x_1}]+\frac{h_1h_2}{h_1+h_2}\,(\lambda+\mu)\,(y_1)_{x_1x_2}=$$
$$=-\frac{2}{h_1+h_2}\,\varphi_2,\quad \text{siendo}\quad x_1=x_2=0,$$

$$-\frac{h_2}{h_1+h_2}\,[(\lambda+2\mu)\,(y_1)_{\bar{x}_1}+\lambda\,(y_2)_{x_2}]+$$
$$+\frac{h_1}{h_1+h_2}\,\mu\,[(y_1)_{x_2}+(y_2)_{\bar{x}_1}]=-\frac{2}{h_1+h_2}\,\varphi_1,$$
$$\frac{h_1}{h_1+h_2}\,[(\lambda+2\mu)\,(y_2)_{x_2}+\lambda\,(y_1)_{\bar{x}_1}]- \qquad (20)$$
$$-\frac{h_2}{h_1+h_2}\,\mu\,[(y_1)_{x_2}+(y_2)_{\bar{x}_1}]=-\frac{\;}{h_1+h_2}\,\varphi,$$

siendo $x_1=l_1,\ x_2=0.$

Para las demás partes de la frontera las ecuaciones se escriben de modo análogo a las (18) — (20).

Calculemos el error de aproximación de las ecuaciones (17) — (20), las cuales acabamos de construir. Es fácil comprobar que los errores de aproximación de las ecuaciones (17) tienen la forma

$$\psi_\alpha(x)=\left(\frac{1}{h_1h_2}\,\varphi_\alpha-F_\alpha(x)\right)+O\,(h_1^2+h_2^2),\qquad x\in\omega.$$

Mas de (12) se deduce que para $x_i\in\omega$

$$\varphi_\alpha=\iint\limits_{G}\eta_i(x)\,F_\alpha(x)\,dx_1\,dx_2,$$

pero

$$\iint_G \eta_i(x)\, dx_1\, dx_2 = h_1 h_2, \quad \iint_G \eta_i(x)(x_\alpha - x_\alpha^{(i_\alpha)})\, dx_1\, dx_2 = 0.$$

Por lo tanto, siendo suficientemente lisas $F_\alpha(x)$,

$$\frac{1}{h_1 h_2}\varphi_\alpha - F_\alpha(x) = O(h_1^2 + h_2^2)$$

y, por consiguiente,

$$\psi_\alpha(x) = O(h_1^2 + h_2^2).$$

Para las ecuaciones (18) hallamos

$$\psi_\alpha(x_1, 0) = -f_\alpha(x, 0) - \frac{h_2}{2}F_\alpha(x_1, 0) +$$
$$+ \frac{\varphi_\alpha}{h_1} + O(h_1^2 + h_2^2), \quad x_1 \neq 0, l_1.$$

A base de (12)

$$\varphi_\alpha(x, 0) = \iint_G F_\alpha(x)\eta_{i,0}(x)\, dx + \int_0^{l_1} \eta_{i,0}(x_1, 0) f_\alpha(x_1, 0)\, dx_1.$$

Puesto que

$$\iint_G \eta_{i_1,0}(x)\, dx = \frac{h_1 h_2}{2}, \quad \int_0^{l_1} \eta_{i,0}(x_1, 0)\, dx_1 = h_1,$$
$$\int_0^{l_1} \eta_{i,0}(x_1, 0)(x_1 - x_1^{(i_1)})\, dx_1 = 0,$$

entonces para $F_\alpha(x)$ y $f_\alpha(x_1, 0)$ suficientemente lisas

$$\varphi_\alpha(x_1, 0) = \frac{h_1 h_2}{2}F_\alpha(x_1, 0) + h_1 f_\alpha(x_1, 0) + O(h_1(h_1^2 + h_2^2))$$

y, por consiguiente,

$$\psi_\alpha(x_1, 0) = O(h_1^2 + h_2^2), \quad x \neq 0, l_1.$$

El error de aproximación de las ecuaciones (19) toma la forma

$$\psi_\alpha(0, 0) = -f_\alpha(0, 0) - \frac{h_1 h_2}{2(h_1 + h_2)}F_\alpha(0, 0) + \frac{2}{h_1 + h_2}\varphi_\alpha(0, 0) +$$
$$+ \frac{1}{2(h_1 + h_2)}\left[h_1^2\lambda\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + h_1 h_2(\lambda + \mu)\frac{\partial^2}{\partial x_1\, \partial x_2} + h_2^2\mu\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right]u_\beta +$$
$$O(h_1^2 + h_2^2), \quad \alpha \neq \beta,$$

con todo esto a base de (12)

$$\varphi_\alpha(0,\ 0)=\iint_G \eta_{00}(x)\,F_\alpha(x)\,dx+\int_0^{l_1}\eta_{00}(x_1,\ 0)\,f_\alpha(x,\ 0)\,dx_1+$$

$$+\int_0^{l_2}\eta_{00}(0,\ x_2)\,f_\alpha(0,\ x_2)\,dx_2=\frac{h_1+h_2}{2}\,f_\alpha(0,\ 0)+O(h_1^2+h_2^2).$$

Por esta razón

$$\psi_\alpha(0,\ 0)=O(h_1+h_2).$$

De modo análogo se demuestra que

$$\psi_\alpha(l_1,\ 0)=O(h_1+h_2).$$

§ 5. Problemas de contorno para las ecuaciones de cuarto orden

En este párrafo aducimos las ecuaciones diferenciales fundamentales de cuarto orden que tienen lugar en la teoría de flexión de las láminas delgadas elásticas. Empleando como ejemplo la ecuación biarmónica, se formulan las condiciones de conjugación para ecuaciones de cuarto orden y las condiciones de frontera de todo género. Las condiciones de conjugación y las condiciones de frontera se simulan utilizando como ejemplo primeramente una ecuación diferencial corriente de cuarto orden.

1. Ecuaciones de cuarto orden. En el § 1 del cap. I se mostró que el equilibrio de una lámina (placa) delgada homogénea isótropa cargada transversalmente para el caso de flexiones pequeñas puede describirse aproximadamente mediante la ecuación

$$\Delta^2 w=\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4}+2\,\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2\,\partial x_2^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4}=\frac{q}{D} \qquad (1)$$

donde w es la flexión de la superficie mediana de la placa; $D=Eh^3/12\,(1-\nu^2)$, el coeficiente de rigidez cilíndrica de la placa; E, el módulo de Young; ν, el coeficiente de Poisson; h, el espesor de la placa y q, la intensidad de la carga transversal.

Si el coeficiente de rigidez cilíndrica D de la lámina no es constante, lo que es posible, por ejemplo, en el caso del espesor variable $h(x)$, entonces, la ecuación de equilibrio, a base de (15) y (19) del § 1 del cap. I toma la forma

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)+$$

$$+2\,\frac{\partial^2}{\partial x_1\,\partial x_2}D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}=q. \qquad (2)$$

Si el material de la placa no es isótropo y, en lo que se refiere a sus propiedades elásticas, posee tres planos de simetría ortogonales recíprocamente, entonces, dicha placa se denomina ortótropa. Si estos planos se toman como los de coordenadas, la ley de Hooke para un material ortótropo tendrá la forma

$$\tau_{11}=\frac{E_1}{1-\nu_1\nu_2}(\varepsilon_{11}+\nu_2\varepsilon_{22}),\quad \tau_{12}=\frac{E_2}{1-\nu_1\nu_2}(\varepsilon_{22}+\nu_1 E_{11}),\quad \tau_{12}=G\varepsilon_{12},$$

donde E_1 y E_2 son los módulos de Young; ν_1 y ν_2, los coeficientes de Poisson ($E_1\nu_2 = E_2\nu_1$) y G, el módulo de cizallamiento (en el caso de una sustancia isótropa $G = E/2(1 + \nu)$).

La ecuación de equilibrio de una placa ortótropa homogénea es la siguiente:

$$D_1\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4}+2D_3\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2\,\partial x_2^2}+D_2\frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4}=q, \tag{3}$$

donde

$$D_1=\frac{E_1h^3}{12(1-\nu_1\nu_2)},\qquad D_2=\frac{E_2h^3}{12(1-\nu_1\nu_2)},$$

$$D_3=D_1\nu_2+2D_{\text{tor}},\quad D_{\text{tor}}=Gh^3/12.$$

(D_1 y D_2 son los coeficientes de rigidez de flexión y D_{tor}, el coeficiente de rigidez de torsión).

Para una placa ortótropa no homogénea la ecuación de equilibrio se escribe del siguiente modo:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left[D_1\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\nu_2\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)\right]+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left[D_2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}+\nu_1\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)\right]+$$
$$+4\frac{\partial^2}{\partial x_1\,\partial x_2}D_{\text{tor}}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}=q. \tag{4}$$

Podemos escribir una serie entera más de ecuaciones de cuarto orden que describen el equilibrio de una placa delgada, tomando en consideración una anisotropía más general, fuerzas en su plano medio y otras circunstancias. No obstante no lo haremos.

2. Condiciones de conjugación para una ecuación diferencial corriente de cuarto orden. Antes de que formulemos las condiciones de conjugación para la ecuación (1), (2), examinemos el modelo unidimensional de la ecuación (1). Semejante modelo es la ecuación de equilibrio de una barra homogénea sometida a una carga transversal,

$$Bw^{\text{IV}}(x)=q(x). \tag{5}$$

En ésta $B = EJ$ es el coeficiente de rigidez de flexión; E, el módulo de Young; J, el momento de inercia de sección de la barra y q, la intensidad de la carga exterior. Es usual denominarse: w, una flexión; w', un ángulo de giro; $-Bw''$, un momento flector y $-Bw'''$,

una fuerza cortante. Examinemos una barra de longitud l, cuyo extremo izquierdo tiene la coordenada $x = 0$ y el derecho, $x = l$. La magnitud

$$W = \frac{B}{2}\int_0^l (w'')^2\,dx \tag{6}$$

se llama energía de deformación elástica de una barra sometida a la flexión. Es fácil comprobar que el hallazgo de las soluciones de la ecuación (5) equivale a la búsqueda de las funciones $w(x)$ que anulan la primera variación de la funcional

$$I(w) = W - \int_0^l w(x)\,q(x)\,dx$$

Examinemos el sistema de dos barras, una de las cuales está situada en el segmento $[-l, 0]$ del eje x y la otra, en el segmento $[0, l]$. Consideraremos que el coeficiente de rigidez de la barra izquierda es igual a B^- y el del derecho, a B^+. Sea que las dos barras se someten a la acción de la carga exterior $q(x)$. De acuerdo con (6) la energía de la barra izquierda (derecha) tiene la forma

$$W^- = \frac{B^-}{2}\int_{-l}^0 (w'')^2\,dx \quad \left(W^+ = \frac{B^+}{2}\int_0^l (w'')^2\,dx\right).$$

Sometamos al examen la funcional

$$I(w) = W^- + W^+ - \int_{-l}^l w(x)\,q(x)\,dx. \tag{7}$$

Igualando a cero la primera variación de ésta, esclarezcamos qué condiciones de conjugación debe verificar la función $w(x)$, siendo $x = 0$. Tenemos

$$\delta I = \frac{d}{dt} I(w + t\delta w)|_{t=0} =$$

$$= B^-\int_{-l}^0 w''\delta w''\,dx + B^+\int_0^l w''\delta w''\,dx - \int_{-l}^l q\delta w\,dx.$$

Integrando por partes y suponiendo que $\delta I = 0$, hallamos

$$B^-\int_{-l}^0 w^{IV}\delta w\,dx + B^+\int_0^l w^{IV}\delta w\,dx - \int_{-l}^l q\delta w\,dx +$$

$$+ B^-(w''\delta w' - w'''\delta w)|_{-l}^0 + B^+(w''\delta w' - w'''\delta w)|_0^l = 0.$$

De aquí, haciendo uso de la arbitrariedad de la función δw, cuando $x = 0$, tendremos

$$B^- (w''\delta w' - w'''\delta w)|_{x=-0} - B^+ (w''\delta w' - w'''\delta w)|_{x=+0} = 0. \qquad (8)$$

Las condiciones de conjugación, siendo $x = 0$, dependen del modo de unión, en este punto, de las barras, que actúan recíprocamente. Supongamos que las barras están acopladas de modo que las flexiones de éstas en el punto $x = 0$ son iguales, es decir,

$$w(-0) = w(+0). \qquad (9)$$

Es evidente que debe verificar a esta condición la función δw, es decir, $\delta w(-0) = \delta w(+0)$.

Si supongamos que las barras se unen rígidamente, es decir, coinciden no sólo sus flexiones sino también sus ángulos de giro

$$w'(-0) = w'(+0), \qquad (10)$$

entonces, la ecuación (8) tomará la forma

$$(B^+w'''|_{x=+0} - B^-w'''|_{x=-0})\,\delta w(0) - \\ - (B^+w''|_{x=+0} - B^-w''|_{x=-0})\,\delta w'(0) = 0, \qquad (11)$$

puesto que en dicho caso la función $\delta w'$ es continua también.

Utilizando de nuevo la arbitrariedad de la función $\delta w(x)$ y suponiendo en (11) primeramente $\delta w'(0) = 0$ y después $\delta w(0) = 0$, obtendremos

$$B^+w''|_{x=+0} = B^-w''|_{x=-0}, \quad B^+w'''|_{x=+0} = B^-w'''|_{x=-0}. \qquad (12)$$

Sea que

$$B = B(x) = \begin{cases} B^-, & x < 0, \\ B^+, & x > 0. \end{cases}$$

Teniendo presente las designaciones ya introducidas

$$[v]|_{x=0} = v(+0) - v(-0) = v_d - v_{iz}$$

y reuniendo (9), (10) y (12), obtendremos un conjunto completo de las condiciones de conjugación en el punto de acoplamiento rígido de las dos barras

$$[w] = [w'] = [Bw''] = [Bw'''] = 0, \quad x = 0. \qquad (13)$$

Estudiemos otros modos de unión de las barras en el punto $x = 0$. Supongamos, por ejemplo, que la unión en este punto es articulada y no obstaculiza al giro mutuo de dichas barras (que es una *articulación perfecta*). Entonces, ya no podemos considerar cumplida la condición (10) y, por consiguiente, no podemos exigir la continuidad de la función $\delta w'$ en el punto $x = 0$. En el caso en cuestión

la ecuación (8) toma la forma

$$(B^+w'''|_{x=+0}-B^-w'''|_{x=-0})\,\delta w(0)-\\ -B^+w''\delta w'|_{x=+0}+B^-w''\delta w'|_{x=-0}=0. \quad (14)$$

Teniendo en cuenta la arbitrariedad de la función $\delta w(x)$ y suponiendo en la ecuación (14) sucesivamente iguales a cero $\delta w'(-0)$ y $\delta w'(+0)$, $\delta w'(-0)$ y $\delta w(0)$, $\delta w'(+0)$ y $\delta w(0)$, obtendremos las siguientes condiciones:

$$[Bw''']_{x=0}=0, \quad B^+w''|_{x=+0}=B^-w''|_{x=-0}=0.$$

Al añadir a estas condiciones la ecuación (9), tendremos la totalidad de *las condiciones de conjugación en el punto de unión de las barras de articulación perfecta*

$$[w]=w''(-0)=w''(+0)-[Bw''']=0, \quad x=0. \quad (15)$$

Examinemos una funcional algo más general que la (7)

$$I(w)=\frac{B^-}{2}\int_{-l}^{0}(w'')^2\,dx+\frac{B^+}{2}\int_{0}^{l}(w'')^2\,dx+\\ +\left(\frac{\alpha}{2}[w']^2+\frac{\beta}{2}w^2\right)_{x=0}-\int_{-l}^{l}qw\,dx. \quad (16)$$

Aquí α y β son ciertas constantes no negativas, cuyo significado se aclarará más tarde. La presencia del término $\frac{\beta}{2}w^2(0)$ en la funcional nos obliga a presuponer la continuidad de $w(x)$ en el punto $x=0$ mientras que el término $\frac{\alpha}{2}[w']^2=\frac{\alpha}{2}\{w'(+0)-w'(-0)\}^2$ tiene sentido sólo en el caso de discontinuidad de la función $w'(x)$, siendo $x=0$.

Escribamos una variación de la funcional (16) y transformémosla empleando la integración por partes

$$\delta I=B^-\int_{-l}^{0}w^{IV}\delta w\,dx+B^+\int_{0}^{l}w^{IV}\delta w\,dx-\\ -\int_{-l}^{l}q\delta w\,dx+B^-(w''\delta w'-w'''\delta w)|_{-l}^{0}+\\ +B^+(w''\delta w'-w'''\delta w)|_{0}^{l}+\alpha[w'][\delta w']|_{x=0}+\beta w\delta w|_{x=0}.$$

Igualando a cero la variación y empleando la arbitrariedad de la función δw, tenemos para $x=0$:

$$\{[Bw''']+\beta w\}\,\delta w|_{x=0}+\{-\alpha[w']+Bw''\}\,\delta w'|_{x=-0}+\\ +\{\alpha[w']-Bw''\}\,\delta w'|_{x=+0}=0.$$

Eligiendo arbitrariamente δw e igualando sucesivamente a cero $\delta w'(-0)$ y $\delta w'(+0)$, $\delta w(0)$ y $\delta w'(+0)$, $\delta w(0)$ y $\delta w'(-0)$, obtendremos las siguientes condiciones de conjugación para la función w:

$$[Bw'''] = -\beta w|_{x=0}, \quad \alpha[w'] = Bw''|_{x=-0}, \quad \alpha[w'] = Bw''|_{x=+0}.$$

Restando y adicionando las dos últimas condiciones y teniendo presente que w es continua en el punto $x = 0$, obtendremos el conjunto total de las condiciones de conjugación

$$[w] = 0, \quad \alpha[w'] = Bw'', \quad [Bw''] = 0, \quad [Bw'''] = -\beta w, \quad (17)$$

siendo $x = 0$.

Aclaremos el sentido mecánico de los parámetros α y β. Si suponemos $\alpha = 0$, las tres primeras condiciones de (17) coincidirán con las tres primeras condiciones de (15); las últimas describen una articulación perfecta. Tomando en consideración esta analogía, denominaremos α coeficiente de rigidez de la articulación. Cuando $\alpha \to \infty$, la segunda de las condiciones (17) se convierte en la condición $[w'] = 0$, y por lo tanto las tres primeras condiciones de (17) coinciden con las tres primeras condiciones de (13). Mas las condiciones (13) describen una unión rígida de las barras, la cual, naturalmente, puede considerarse como articulación infinitamente rígida, o sea, una articulación con coeficiente de rigidez $\alpha = \infty$. Precisamente esto es lo que hemos obtenido.

Cuando $\beta \to \infty$ la última de las condiciones (17) adquiere la forma $w(0) = 0$. Pero esta condición significa que en el punto $x = 0$ las barras se sostienen por un apoyo rígido, de modo que β puede denominarse coeficiente de rigidez del apoyo.

Analicemos ahora todos los casos particulares posibles de las condiciones (17).

1. $\alpha = \beta = 0$.

$$[w] = 0, \quad w''_{iz} = w''_d = 0, \quad [Bw'''] = 0.$$

La condición $\alpha = 0$ quiere decir que la articulación es perfecta en tanto que la condición $\beta = 0$, que en el punto $x = 0$ no hay apoyo. Estas condiciones coinciden con las condiciones (15). Aquí $w_{iz} = w(-0)$, $w_d = w(+0)$.

2. $\alpha = \text{const}$, $\beta = 0$.

$$[w] = 0, \quad \alpha[w'] = Bw'', \quad [Bw''] = [Bw'''] = 0.$$

Esta es la condición de una articulación que posee una rigidez finita.

3. $\alpha = \infty$, $\beta = 0$.

La condición $\alpha = \infty$ significa que la derivada w' es continua en el punto $x = 0$ y, por lo tanto, la expresión (16) no tiene el término correspondiente. De aquí se desprende, en particular, que en la (16) en vez de las dos integrales puede escribirse una con límites

$-l$ y l. Las condiciones de conjugación tienen la forma

$$[w] = [w'] = [Bw''] = [Bw'''] = 0.$$

Esta condición significa que el acoplamiento de las barras es perfectamente rígida, éstas pueden considerarse como una barra. Dichas condiciones coinciden con las condiciones (13).

4. $\alpha = 0$, $\beta =$ const.

$$[w] = 0, \quad w''_{iz} = w''_d = 0, \quad [Bw'''] = -\beta w.$$

Las tres primeras condiciones indican que la articulación es perfecta, pero la cuarta condición testimonia la existencia de un apoyo elástico en el punto de acoplamiento de las barras.

5. $\alpha =$ const, $\beta =$ const.

$$[w] = 0, \quad \alpha\, [w'] = Bw'', \quad [Bw''] = 0, \quad [Bw'''] = -\beta w.$$

Las tres primeras condiciones evidencian que la articulación es de rigidez finita a la vez que la cuarta, que el apoyo es elástico.

6. $\alpha = \infty$, $\beta =$ const.

$$[w] = [w'] = [Bw''] = 0, \quad [Bw'''] = -\beta w.$$

Las tres primeras condiciones muestran que el acoplamiento de las barras es de rigidez perfecta, es decir, que se tiene una barra; la cuarta condición indica la presencia de un apoyo elástico.

7. $\alpha = 0$, $\beta = \infty$.

$$w_{iz} = w_d = w''_{iz} = w''_d = 0.$$

La primera y la tercera condiciones testimonian que el apoyo de la barra izquierda en el punto $x = 0$ es articulado en tanto que la segunda y la cuarta, que es articulado el apoyo de la barra derecha. En tal caso las barras no se unen de modo alguno y pueden considerarse por separado.

8. $\alpha =$ const, $\beta = \infty$.

$$w_{iz} = w_d = 0, \quad \alpha\, [w'] = Bw'', \quad [Bw''] = 0.$$

Aquí tenemos una articulación de rigidez finita y sostenida por un apoyo rígido perfecto.

9. $\alpha = \infty$, $\beta = \infty$.

$$w_{iz} = w_d = 0, \quad [w'] = [Bw''] = 0.$$

La barra se sostiene en el punto $x = 0$ por un apoyo rígido perfecto.

3. Condiciones de conjugación para las ecuaciones de cuarto orden con derivadas parciales. Dirijámonos ahora a la ecuación de equilibrio de una placa (2). Examinemos una placa isótropa rectangular la cual en el plano Ox_1x_2 ocupa el recinto $G_+ = \{x = (x_1, x_2) \mid 0 \leqslant$

$\leqslant x_\alpha \leqslant l_\alpha$, $\alpha = 1, 2\}$. Como ya se mencionó en el cap. I, la energía de deformación elástica de una placa, al flexionar ésta, tiene la forma

$$W = \frac{1}{2} \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} D \left\{ (\Delta w)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right] \right\} dx_1 dx_2. \quad (18)$$

Sea que la placa en cuestión está unida rígidamente por el contorno $x_1 = 0$ con la barra, que la sostiene y cuyo coeficiente de rigidez de flexión es B^+ y el coeficiente de rigidez de torsión es C^+. Ya hemos señalado que la energía de deformación elástica de una barra, al flexionar ésta, es

$$\frac{1}{2} \int_0^{l_2} B^+ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right)^2 dx_2; \quad (19)$$

recibe el nombre de energía de deformación elástica por torsión de una barra la magnitud

$$\frac{1}{2} \int_0^{l_2} C^+ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 dx_2. \quad (20)$$

Adicionando estas expresiones a (18), obtendremos la expresión de la energía de una placa apoyada por una barra

$$W^+ = \frac{1}{2} \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} D \left\{ (\Delta w)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right] \right\} dx_1 dx_2 + \\ + \frac{1}{2} \int_0^{l_2} \left[B^+ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right)^2 + C^+ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right]_{x_1=0} dx_2. \quad (21)$$

Examinemos una placa más, que ocupa el recinto

$$G_- = \{x = (x_1, x_2), \quad -l_1 \leqslant x_1 \leqslant 0, \quad 0 \leqslant x_2 \leqslant l_2\}$$

y está apoyada por el contorno $x_1 = 0$ mediante una barra de rigideces B^- y C^-. La energía de esta placa es

$$W^- = \frac{1}{2} \int_{-l_1}^{0} \int_0^{l_2} D \left\{ (\Delta w)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right] \right\} dx_1 dx_2 + \\ + \frac{1}{2} \int_0^{l_2} \left[B^- \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right)^2 + C^- \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right]_{x_1=0} dx_2. \quad (22)$$

Juntamos estas dos placas por una articulación determinada y consideraremos que la energía del sistema obtenido es

$$W = W^{+} + W^{-} + \frac{1}{2} \int_{0}^{l_2} \left\{ \alpha \left[\frac{\partial w}{\partial x_1} \right]^2 + \beta w^2 \right\}_{x_1=0} dx_2. \tag{23}$$

En ésta, igual que en la expresión de la energía para el sistema de barras, α es el coeficiente de rigidez de la articulación y β, el coeficiente de rigidez del apoyo, el cual quizás se encuentra por debajo de la articulación.

Escribamos la funcional

$$I(w) = W - \int_{-l_1}^{l_1} \int_{0}^{l_2} q(x)\, w\, dx_1 dx_2. \tag{24}$$

Hallemos su primera variación e igualémosla a cero. Transformando la correlación obtenida con auxilio de las fórmulas de integración por partes e introduciendo las designaciones

$$\begin{aligned} M_1(x) &= -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right), \\ Q_1(x) &= -\frac{\partial}{\partial x_1} D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right) - 2\frac{\partial}{\partial x_2}(1-\nu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}, \end{aligned} \tag{25}$$

tendremos

$$\begin{aligned} \delta I = \int_{0}^{l_2} \Big\{ & M_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \delta w \Big|_{x_1=+0} - Q_1 \delta w \Big|_{x_1=+0} - M_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \delta w \Big|_{x_1=-0} + \\ & + Q_1 \delta w \Big|_{x_1=-0} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(B^{+} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right) \delta w \Big|_{x_1=+0} + \\ & + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(B^{-} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right) \delta w \Big|_{x_1=-0} - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(C^{+} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}\right) \frac{\partial}{\partial x_1} \delta w \Big|_{x_1=+0} - \\ & - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(C^{-} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}\right) \frac{\partial}{\partial x_1} \delta w \Big|_{x_1=-0} + \\ & + \alpha \left[\frac{\partial w}{\partial x_1} \Big|_{x_1=+0} - \frac{\partial w}{\partial x_1} \Big|_{x_1=-0} \right] \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \delta w \Big|_{x_1=+0} - \frac{\partial}{\partial x_1} \delta w \Big|_{x_1=-0} \right] + \\ & + \beta w \delta w \Big|_{x_1=0} \Big\} dx_2 + \ldots, \end{aligned}$$

donde los puntos suspensivos designan los términos que no se refieren a la articulación. De (23) se desprende que la función $w(x)$ debe ser continua cuando $x_1 = 0$ y, por consiguiente, debe ser continua asimismo su variación δw.

Igualando ahora sucesivamente a cero los coeficientes de δw, $\frac{\partial}{\partial x_1}\delta w\Big|_{x_1=+0}$ y $\frac{\partial}{\partial x_1}\delta w\Big|_{x_1=-0}$, obtenemos

$$[Q_1]\Big|_{x_1=0}=\beta w+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left\{(B^+ + B^-)\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right\}\Big|_{x_1=0},$$

$$\alpha\left[\frac{\partial w}{\partial x_1}\right]\Big|_{x_1=0}=-M_1+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(C^+\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)\Big|_{x_1=+0},$$

$$\alpha\left[\frac{\partial w}{\partial x_1}\right]\Big|_{x_1=0}=-M_1-\frac{\partial}{\partial x_2}\left(C^-\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)\Big|_{x_1=-0}.$$

Las condiciones de conjugación serán más simétricas, si escribimos en vez de las dos últimas correlaciones sus semisuma y diferencia. Añadiendo a éstas la condición de continuidad de w cuando $x_1 = 0$, tendremos $[w] = 0$,

$$\alpha\left[\frac{\partial w}{\partial x_1}\right]=\frac{1}{2}\left\{D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)\Big|_{x_1=+0}+D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)\Big|_{x_1=-0}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(C^+\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)\Big|_{x_1=+0}-\frac{\partial}{\partial x_2}\left(C^-\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)\Big|_{x_1=-0}\right\},\quad (26)$$

$$\left[D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)\right]=-\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}\left(C^+\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)\Big|_{x_1=+0}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(C^-\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)\Big|_{x_1=-0}\right\},$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_1}D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)+2\frac{\partial}{\partial x_2}(1-\nu)D\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right]=$$
$$=-\beta w-\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}(B^+ + B^-)\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2},$$

siendo $x_1 = 0$.

Empleando las designaciones (25) para abreviar la anotación, escribamos los casos particulares más interesantes de las condiciones (26).

1. $\alpha = \infty$, $\beta = B^{\pm} = C^{\pm} = 0$.

$$[w]=\left[\frac{\partial w}{\partial x_1}\right]=[M_1]=[Q_1]=0\quad\text{cuando}\quad x_1=0.$$

Estas condiciones expresan el hecho de que las placas se unen rígidamente. Dichas condiciones pueden reescribirse así:

$$[w]=\left[\frac{\partial w}{\partial x_1}\right]=\left[D\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right]=\left[\frac{\partial}{\partial x_1}D\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right]=0,\quad\text{siendo}\quad x_1=0.$$

2. $\alpha=\beta=0$, $B^+=B^-=B$, $C^+=C^-=C$.

$$[w]=M_1\mp\frac{\partial}{\partial x_2}\left(C\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)\Big|_{x_1=\pm 0}=0,\quad [Q_1]=2\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}B\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}.$$

Aquí tenemos dos placas idénticas acopladas mediante una articulación ideal, además, sus bordes lindantes con la articulación

están dotadas de nervios de refuerzo, los cuales están a favor tanto de la flexión como de la torsión.

3. $\alpha=\infty$, $\beta=0$, $B^+=B^-=B$, $C^+=C^-=C$.

$$[w]=\left[\frac{\partial w}{\partial x_1}\right]=0,\quad [M_1]=2\frac{\partial}{\partial x_2}\left(C\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right),$$
$$[Q_1]=-2\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(B\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right).$$

Estas condiciones corresponden a una placa entera dotada de un nervio de refuerzo.

4. $\alpha=\beta=C^-=C^+=0$, $B^+=B^-=B$.

$$[w]\,|_{x_1=0}=M_1\,|_{x_1=\pm 0}=0,\quad [Q_1]=2\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}B\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2},\quad \text{siendo}\quad x_1=0.$$

Estas condiciones difieren de las condiciones 2 en que los nervios de refuerzo no están a favor de la torsión. En este caso las placas pueden considerarse no como acopladas rígidamente con las barras que las refuerzan, sino como apoyadas en éstas.

5. $\alpha=\infty$, $\beta=C^-=C^+=0$, $B^+=B^-=B$.

$$[w]=\left[\frac{\partial w}{\partial x_1}\right]=\left[D\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right]=0,\quad [Q_1]=2\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(B\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right).$$

La barra sirve de apoyo para las placas acopladas rígidamente (o sea, una placa entera).

4. Condiciones de frontera para la ecuación de equilibrio de una barra. Escribamos las condiciones de frontera para la ecuación (5) en el punto $x=0$. Adicionemos a la expresión de la energía de una barra (6) dos sumandos

$$\frac{\alpha}{2}(w'(0))^2 \quad \text{y} \quad \frac{\beta}{2}w^2(0)$$

y consideraremos que su energía, cualquiera que sea el modo de fijar la barra en el punto $x=0$, adquiere la forma

$$W=\frac{B}{2}\int_0^l (w'')^2\,dx+\frac{\alpha}{2}(w'(0))^2+\frac{\beta}{2}w^2(0). \tag{27}$$

Ahora escribamos la funcional

$$I(w)=W-\int_0^l q(x)\,w(x)\,dx,$$

calculemos su primera variación e igualémosla a cero. Al transformar empleando la fórmula de integración por partes, tenemos

$$\delta I=B\int_0^l w^{\mathrm{IV}}\delta w\,dx+B(w''\delta w'-w'''\delta w)\,|_0^l+(\alpha w'\delta w'+\beta w\delta w)\,|_{x=0}=0$$

De aquí hallamos del modo común las condiciones de frontera

$$-Bw'' + \alpha w' = 0, \quad Bw''' + \beta w = 0. \tag{28}$$

Analicemos los casos particulares de las condiciones de frontera (28).

1. $\alpha = \beta = \infty$. La flexión y el ángulo de giro se reducen a cero. Estas son las condiciones de una sujeción rígida

$$w = w' = 0.$$

2. $\alpha = 0$, $\beta = \infty$. La flexión y el momento flector se reducen a cero. Tenemos la condición de un apoyo articulado

$$w = w'' = 0.$$

3. $\alpha = \beta = 0$. En este caso se reducen a cero el momento flector y la fuerza de corte. Tenemos las condiciones de un extremo libre

$$w'' = w''' = 0.$$

4. $\alpha = \infty$, $\beta = 0$. Se reducen a cero el ángulo de giro y la fuerza de corte. Estas son las condiciones de simetría

$$w' = w''' = 0.$$

5. $\alpha = \text{const}$, $\beta = \infty$. La flexión es igual a cero y el momento flector es proporcional al ángulo de giro. Esta es la condición de una sujeción elástica

$$w = 0, \quad -Bw'' = \alpha w' = 0.$$

6. $\alpha = 0$, $\beta = \text{const}$. El momento es igual a cero a la vez que la fuerza de corte es proporcional a la flexión. Esta es la condición de un apoyo elástico

$$w = 0, \quad Bw''' + \beta w = 0.$$

Los casos particulares aducidas de las condiciones de frontera (28) nos dan pie a considerar α como coeficiente de rigidez de sujeción y β como coeficiente de rigidez de apoyo.

5. **Condiciones de frontera para la ecuación de equilibrio de una placa isótropa.** Dirijámonos ahora a la ecuación de equilibrio de una placa isótropa (2) y deduzcamos para ésta las condiciones de frontera. Examinemos una placa rectangular la cual ocupa en el plano Ox_1x_2 un recinto $G = \{x = (x_1, x_2) \mid 0 \leqslant x_\alpha \leqslant l_\alpha, \ \alpha = 1, 2\}$. Supongamos que su borde para $x_1 = 0$ está provisto de un nervio de refuerzo cuyo coeficiente de rigidez de flexión es igual a B y el coeficiente de rigidez de torsión, a C.

Escribamos las condiciones de frontera para la ecuación (2) cuando $x_1 = 0$. La energía de la placa, sin atender el nervio de refuerzo y el procedimiento de sujeción de frontera, se expresa por la correlación (18); la energía de flexión y la de torsión del nervio

de refuerzo, por las correlaciones (19) y (20), respectivamente. Al fijar la placa por el borde $x_1 = 0$ empleando uno u otro procedimiento, admitamos que la energía de ésta es

$$W = \frac{1}{2} \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \left\{ D(\Delta w)^2 - 2(1-\nu) D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right] \right\} dx_1 dx_2 +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^{l_2} \left\{ B \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right)^2 + C \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right\}_{x_1=0} dx_2 +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^{l_2} \left\{ \alpha \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 + \beta w^2 \right\}_{x_1=0} dx_2. \quad (29)$$

Ahora escribamos la funcional

$$I(w) = W - \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} q(x) w(x) \, dx_1 dx_2,$$

calculemos su primera variación e igualémosla a cero. Efectuando las transformaciones corrientes y anotando sólo los términos que se refieren al borde $x_1 = 0$, tendremos

$$\delta I = \int_0^{l_2} \left\{ -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) \frac{\partial}{\partial x_1} \delta w + \left(\frac{\partial}{\partial x_1} D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) + \right. \right.$$

$$+ 2 \frac{\partial}{\partial x_2} (1-\nu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \Big) \delta w + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} B \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \delta w - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(C \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \times$$

$$\left. \times \frac{\partial}{\partial x_1} \delta w + \alpha \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \delta w + \beta w \delta w \right\}_{x_1=0} dx_2 + \ldots \quad (30)$$

Igualando a cero sucesivamente los coeficientes de $\frac{\partial}{\partial x_1} \delta w$ y δw, obtendremos las condiciones de frontera

$$\alpha \frac{\partial w}{\partial x_1} = D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(C \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right), \quad (31)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial x_2} (1-\nu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} = -\beta w - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} B \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2},$$

siendo $x_1 = 0$.

Escribamos los casos particulares más importantes de las condiciones (31).

1. $\alpha = \beta = \infty$. Tenemos el caso de un borde rígidamente sujetado

$$w = \frac{\partial w}{\partial x_1} = 0. \quad (32)$$

2. $\alpha = C = 0$, $\beta = \infty$. Este es el caso de un apoyo de articulación

$$w = D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right) = 0 \tag{33}$$

ó

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = 0. \tag{34}$$

3. $\alpha = \beta = B = C = 0$. El borde de la placa es libre

$$D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right) = 0, \tag{35}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right) + 2\frac{\partial}{\partial x_2}(1-\nu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} = 0.$$

4. $\alpha = \infty$, $\beta = B = 0$. En este caso las condiciones (31) se convierten en las condiciones de simetría

$$\frac{\partial w}{\partial x_1} = \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} = 0. \tag{36}$$

5. $\alpha = \beta = 0$. La placa tiene un borde libre dotado de un nervio de refuerzo.

Detengámonos, además, sobre las condiciones de adaptación en los ángulos de la placa. Con este objetivo anotemos la expresión de energía para la placa rectangular reforzada mediante nervios por los lados $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$ y de cierto modo fijada por estos bordes. Denotemos los parámetros referentes al borde $x_1 = 0$ a través del subíndice -1 (por ejemplo, α_{-1}) y los referentes al borde $x_2 = 0$ a través del subíndice -2 (por ejemplo, B_{-2}). La energía de la placa tendrá la siguiente forma:

$$W = \mathring{W} + \frac{1}{2}\int_0^{l_2} \left\{ B_{-1}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2 + C_{-1}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 + \alpha_{-1}\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \beta_{-1} w^2 \right\}_{x_1=0} dx_2 + \frac{1}{2}\int_0^{l_1} \left\{ B_{-2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)^2 + C_{-2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \alpha_{-2}\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)^2 + \beta_{-2} w^2 \right\}_{x_2=0} dx_1,$$

donde $\mathring{W}$ se define mediante la correlación (8). Escribamos como siempre la funcional $I(w)$ y calculemos su primera variación. Igualando a cero aquellas expresiones sumadas, las cuales se refieren al punto $x_1 = x_2 = 0$, tendremos

$$2(1-\nu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}\delta w - B_{-1}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\frac{\partial}{\partial x_2}\delta w + \frac{\partial}{\partial x_2} B_{-1}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\delta w -$$
$$- C_{-1}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_1}\delta w - B_{-2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\frac{\partial}{\partial x_1}\delta w +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial x_1} B_{-2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\delta w - C_{-2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\delta w = 0. \tag{37}$$

Luego, igualando a cero los coeficientes de δw, $\frac{\partial}{\partial x_1}\delta w$ y $\frac{\partial}{\partial x_2}\delta w$, obtendremos las condiciones de adaptación, siendo $x_1 = x_2 = 0$,

$$\begin{gathered}2(1-\nu)D\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}+\frac{\partial}{\partial x_2}B_{-1}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}+\frac{\partial}{\partial x_1}B_{-2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}=0,\\ B_{-1}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}+C_{-2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}=0,\quad C_{-1}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}+B_{-2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}=0.\end{gathered}\tag{38}$$

Estas condiciones se plantean sólo en el caso de que los propios δw, $\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\delta w$ no se reducen a cero. Si, por ejemplo, $\delta w = 0$, la primera de las condiciones de adaptación (38) se aniquila. Cuando $B_{-\alpha} = C_{-\alpha} = 0, \alpha = 1,\ 2$, tenemos la única condición de adaptación

$$2(1-\nu)D\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}=0.\tag{39}$$

OBSERVACION. Dado que en ninguna parte no teníamos en cuenta el trabajo de las fuerzas exteriores en la línea de fijación, todas las condiciones de frontera que escribíamos han resultado homogéneas. Tomando en consideración todas las fuerzas indicadas llegamos a unas condiciones no homogéneas.

§ 6. Aproximación de los problemas de contorno para las ecuaciones de cuarto orden

En este párrafo construiremos las aproximaciones de red de las ecuaciones de equilibrio, de las condiciones de conjugación y de las condiciones de frontera, analizadas en el párrafo anterior. La construcción de las aproximaciones de red se efectuará según el método de aproximación de una funcional (véase el § 3 del cap. II).

1. Aproximación de las ecuaciones de equilibrio de una placa. Examinemos la ecuación de equilibrio más general de las escritas en el párrafo anterior, que es la ecuación (4) del § 5 para una placa ortótropa heterogénea. Supongamos que la placa es rectangular y ocupa un recinto $\overline{G} = \{x = (x_1, x_2) \mid 0 \leqslant x_\alpha \leqslant l_\alpha\}$ del plano Ox_1x_2. La energía de deformación elástica de la placa ortótropa, sometida a la acción de una carga transversal, se prefija por la correlación

$$W(w)=\frac{1}{2}\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\left\{D_1\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)^2+D_2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)+\right.$$
$$\left.+(D_1\nu_2+D_2\nu_1)\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}+4D_{\text{tor}}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2\right\}dx_1\,dx_2.\tag{1}$$

Examinemos la funcional

$$I(w) = W(w) - \int_0^{l_1}\int_0^{l_2} q(x)\,w(x)\,dx_1\,dx_2. \tag{2}$$

Es fácil comprobar que toda solución de la ecuación (4) del § 5 reduce a cero la primera variación de la funcional $I(w)$.

Introduzcamos para el recinto $\overline{G}$ una red uniforme rectangular $\overline{\omega} = \overline{\omega}_1 \times \overline{\omega}_2$, donde $\overline{\omega}_\alpha = \{x_\alpha = x_\alpha^{(i_\alpha)} \mid, x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h_\alpha,\ i_\alpha = 0, 1, \ldots, N_\alpha\}$, y aproximemos sobre esta red la funcional (2), (1). Como nos interesa sólo la aproximación de la ecuación (4) del § 5, para sencillez supondremos que la placa está apoyada por su contorno, es decir, satisface las condiciones de frontera (34) del § 5.

Sustituyamos las integrales de los tres primeros sumandos en la correlación (1) y la del último sumando en (2) por fórmulas de cuadratura de los trapecios; la integral del último sumando en la correlación (1) se sustituye por una combinación lineal de fórmulas de cuadratura de todo género de los rectángulos. Atendiendo las condiciones de frontera (34) del § 5, tendremos

$$W \sim \frac{1}{2}\sum_{\omega}\left\{D_1\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)^2 + D_2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2 + (D_1\nu_2 + D_2\nu_1)\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right\}h_1h_2 +$$
$$+\frac{1}{2}\left\{\sum_{\omega_1^+\times\omega_2^+} D_{\text{tor}}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2 h_1h_2 + \sum_{\omega_1^+\times{}^+\omega_2} D_{\text{tor}}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2 h_1h_2 + \right.$$
$$\left. + \sum_{{}^+\omega_1\times\omega_2^+} D_{\text{tor}}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2 h_1h_2 + \sum_{{}^+\omega_1\times{}^+\omega_2} D_{\text{tor}}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2 h_1h_2\right\},$$

$$\int_0^{l_1}\int_0^{l_2} q(x)\,w(x)\,dx_1\,dx_2 \sim \dot{\sum_{\omega}} q w h_1 h_2.$$

Ahora aproximemos las derivadas por razones en diferencias. Sea que

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha^2} \sim w_{\bar{x}_\alpha x_\alpha},$$

pero las derivadas mixtas en cada una de las sumas se aproximarán de modo que sea posible realizar la suma correspondiente para las funciones preestablecidas sobre $\overline{\omega}$. Sustituyendo dichas aproximaciones en (2), obtendremos la siguiente aproximación de la funcional

$I(w)$:

$$I_h(y) = W_h(y) - \sum_{\omega} q(x)\, y(x)\, h_1 h_2,$$

$$W_h(y) = \frac{1}{2} \sum_{\omega} \{D_1 (y_{\bar{x}_1 x_1})^2 + D_2 (y_{\bar{x}_2 x_2})^2 + (D_1 \nu_2 + D_2 \nu_1)\, y_{\bar{x}_1 x_1} y_{\bar{x}_2 x_2}\} h_1 h_2 +$$

$$+ \frac{1}{2} \Big\{ \sum_{\omega_1^+ \times \omega_2^+} D_{\text{tor}} (y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2})^2 h_1 h_2 + \sum_{\omega_1^+ \times {}^+\omega_2} D_{\text{tor}} (y_{\bar{x}_1 x_2})^2 h_1 h_2 +$$

$$+ \sum_{{}^+\omega_1 \times \omega_2^+} D_{\text{tor}} (y_{x_1 \bar{x}_2})^2 h_1 h_2 + \sum_{{}^+\omega_1 \times {}^+\omega_2} D_{\text{tor}} (y_{x_1 x_2})^2 h_1 h_2 \Big\}.$$

$I_h(y)$ es una función de las variables $y(x)$, siendo $x = x_i \in \omega$. Calculando sus primeras derivadas e igualándolas a cero en los puntos x, siendo $i_\alpha = 2, 3, \ldots, N_\alpha - 2$, obtendremos las aproximaciones de la ecuación (4) del § 5:

$$(D_1 (y_{\bar{x}_1 x_1} + \nu_2 y_{\bar{x}_2 x_2}))_{\bar{x}_1 x_1} + (D_2 (y_{\bar{x}_2 x_2} + \nu_1 y_{\bar{x}_1 x_1}))_{\bar{x}_2 x_2} + (D_{\text{t}} y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2})_{x_1 x_2} +$$

$$+ (D_{\text{tor}} y_{\bar{x}_1 x_2})_{x_1 x_2} + (D_{\text{tor}} y_{x_1 \bar{x}_2})_{\bar{x}_1 x_2} + (D_{\text{tor}} y_{x_1 x_2})_{\bar{x}_1 \bar{x}_2} = q. \qquad (3)$$

Si la placa es homogénea, la ecuación algo se simplifica:

$$D_1 y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_1 x_1} + D_2 y_{\bar{x}_2 x_2 \bar{x}_2 x_2} + 2 D_3 y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2} = q, \qquad (4)$$

donde

$$D_3 = D_1 \nu + 2 D_{\text{tor}}.$$

Si, además, la placa es isótropa, o sea, $D_1 = D_2 = D_3 = D$, entonces, tenemos la siguiente ecuación:

$$\Delta_h^2 y = y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_1 x_1} + 2 y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2} + y_{\bar{x}_2 x_2 \bar{x}_2 x_2} = q/D. \qquad (5)$$

No es difícil comprobar que el error de aproximación de la ecuación (3), siendo bastante lisos los coeficientes y la solución que se aproxima, es $O(h_1^2 + h_2^2)$.

2. Aproximación de las condiciones de conjugación para una ecuación corriente de cuarto orden. Igual que en el p. 2 del § 5, examinemos el sistema de dos barras una de las cuales en estado no deformado ocupa un segmento $[-l, 0]$ del eje Ox mientras que la otra, el segmento $[0, l]$ del mismo eje. Sean B^- y B^+ los coeficientes de rigidez de la primera barra y de la segunda, respectivamente, a la vez que las dos barras se someten a una carga de intensidad $q(x)$. La forma de dichas barras en posición de equilibrio se describe por la ecuación (5) del § 5, en la cual debe ponerse $B = B^-$ para la primera barra y $B = B^+$ para la segunda. Supongamos que en el punto de unión $x = 0$ de las barras la función de flexión $w(x)$ de

las barras satisface las condiciones de conjugación (17) del § 5:

$$[w]=0,\ \alpha\,[w']=Bw'',\ [Bw'']=0,\ [Bw''']=-\beta w, \quad \text{siendo} \quad x=0. \qquad (6)$$

Nuestra tarea consiste en la construcción de las aproximaciones de red de estas condiciones. Con este fin introduzcamos en el segmento $[-l,\ l]$ una red uniforme $\bar{\omega}=\{x=x_i=ih \mid i=0,\ \pm 1,\ \ldots,\ \pm N\}$ y aproximemos sobre ésta la funcional (16) del § 5:

$$I(w)=\frac{B^-}{2}\int_{-l}^{0}(w'')^2\,dx+\frac{B^+}{2}\int_{0}^{l}(w'')^2\,dx+ \\ +\left(\frac{\alpha}{2}[w']^2+\frac{\beta}{2}w^2\right)_{x=0}-\int_{-l}^{l}qw\,dx, \qquad (7)$$

de la cual hemos obtenido las condiciones de (1). Designemos mediante $\omega=\{x_i \mid i=0,\ \pm 1,\ \ldots,\ \pm(N-1)\}$ el conjunto de los nodos interiores de la red $\bar{\omega}$, mediante $\omega_{iz}=\{x_i \mid i=-1,\ -2,\ \ldots,\ -(N-1)\}$ el conjunto de los nodos interiores de la red situado en el segmento $[-l,\ 0]$, mediante $\omega_{\text{der}}=\{x_i \mid i=1,\ 2,\ \ldots,\ N-1\}$ el conjunto de los nodos interiores de la red que se contienen en el segmento $[0,\ l]$. Puesto que nos interesa sólo la aproximación de las condiciones de conjugación, para sencillez supondremos que, cuando $x=\pm l$, se verifican las condiciones de un apoyo articulado

$$w=w''=0, \quad \text{siendo} \quad x=\pm l.$$

Aproximaremos las integrales de (7) empleando las fórmulas de los trapecios. Tomando en consideración las condiciones de frontera, tendremos

$$\int_{-l}^{l}qw\,dx\sim\sum_{\omega}q(x)\,w(x)\,h,$$

$$\int_{-l}^{0}(w'')^2\,dx\sim\sum_{\omega_{\text{iz}}}(w'')^2h+(w''_{\text{iz}})^2\frac{h}{2},$$

$$\int_{0}^{l}(w'')^2\,dx\sim\sum_{\omega_{\text{der}}}(w'')^2h+(w''_{\text{der}})^2\frac{h}{2},$$

donde

$$w''_{\text{iz}}=w''(-0), \qquad w''_{\text{der}}=w''(+0).$$

Poniendo estas aproximaciones en la expresión (7), obtendremos

$$I(w) \sim \frac{1}{2}\Big\{B^- \sum_{\omega_{\text{iz}}} (w'')^2 h + B^+ \sum_{\omega_{\text{der}}} (w'')^2 h - 2\sum_{\omega} q(x)\, w(x)\, h\Big\} + $$

$$+ I_0 + \frac{\beta}{2} w^2(0), \qquad (8)$$

donde

$$I_0 = \frac{1}{2}\Big\{\frac{hB^-}{2}(w''_{\text{iz}})^2 + \frac{hB^+}{2}(w''_{\text{der}})^2 + \alpha\,[w']^2\,|_{x=0}\Big\}. \qquad (9)$$

Para $x \in \omega_{\text{iz}}$ y $x \in \omega_{\text{der}}$ sustituyamos las derivadas w'' por las segundas razones en diferencias

$$w'' \sim w_{\bar{x}x}, \text{ siendo } x \in \omega_{\text{iz}},\ \omega_{\text{der}},$$

el método de aproximación de las derivadas en el punto $x = 0$ lo estudiaremos de modo especial.

Al principio examinemos el caso en que el coeficiente α es finito y no es igual a cero. A partir de las condiciones (6)

$$B^-(w''_{\text{iz}})^2 + B^+(w''_{\text{der}})^2 = \Big(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+}\Big)(B^- w''_{\text{iz}})^2 =$$

$$= \Big(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+}\Big)\alpha^2\,[w']^2\,|_{x=0}.$$

Sustituyendo esta correlación en la (9), obtendremos

$$I_0 = \frac{\alpha}{2}\Big\{1 + \frac{h\alpha}{2}\Big(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+}\Big)\Big\}[w']^2. \qquad (10)$$

Escribamos la aproximación elemental del salto de la derivada e investiguemos el error de ésta

$$(w_x - w_{\bar{x}})\,|_{x=0} = [w']\,|_{x=0} + \frac{h}{2}(w''_{\text{der}} + w''_{\text{iz}}) + O(h^2).$$

Empleando la segunda y tercera condiciones de (6), tendremos

$$(w_x - w_{\bar{x}})\,|_{x=0} = \Big\{1 + \frac{\alpha h}{2}\Big(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+}\Big)\Big\}[w']\,|_{x=0} + O(h^2)$$

o

$$[w']\,|_{x=0} = \Big\{1 + \frac{\alpha h}{2}\Big(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+}\Big)\Big\}^{-1}(w_x - w_{\bar{x}})\,|_{x=0} + O(h^2).$$

Sustituyendo esta correlación en (10), hallamos que

$$I_0 = \frac{\alpha}{2}\Big\{1 + \frac{\alpha h}{2}\Big(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+}\Big)[w']^2\Big\}\Big|_{x=0} =$$

$$= \frac{\alpha}{2}\Big\{1 + \frac{\alpha h}{2}\Big(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+}\Big)\Big\}^{-1}(w_x - w_{\bar{x}})^2 + O(h^2).$$

Omitiendo la magnitud $O(h^2)$, obtendremos la aproximación de la expresión (10)

$$I_0 \sim \frac{\alpha}{2}\left\{1+\frac{\alpha h}{2}\left(\frac{1}{B^-}+\frac{1}{B^+}\right)\right\}^{-1}(w_x-w_{\bar{x}})^2. \quad (11)$$

Examinemos ahora los casos límites, cuando $\alpha = 0$ y $\alpha = \infty$. Si $\alpha = 0$, entonces, de acuerdo con (6),

$$w''_{\text{iz}} = w''_{\text{der}} = 0$$

y consecuentemente I_0 se anula. Suponiendo formalmente que $\alpha = 0$ en la aproximación (11), obtendremos la aproximación $I_0 \sim 0$. Si $\alpha = \infty$, entonces, de acuerdo con las condiciones (6), $[w']_{x=0} = 0$ y la correlación (9) toma la forma

$$I_0 = \frac{h}{4}\{B^+(w''_{\text{der}})^2 + B^-(w''_{\text{iz}})^2\}. \quad (12)$$

Pasamos al límite en la aproximación (11) con respecto a $\alpha \to \infty$ y obtenemos

$$I_0 \sim \frac{B^+B^-}{h(B^++B^-)}(w_x-w_{\bar{x}})^2.$$

Desarrollando según la fórmula de Taylor, hallamos que

$$\frac{B^+B^-}{h(B^++B^-)}(w_x-w_{\bar{x}})^2 = \frac{hB^+B^-}{4(B^++B^-)}(w''_{\text{der}}+w''_{\text{iz}})^2 + O(h^3). \quad (13)$$

En virtud de la tercera condición de (6) $B^+w''_{\text{der}} = B^-w''_{\text{iz}}$ y, en consecuencia,

$$B^+B^-(w''_{\text{der}}+w''_{\text{iz}})^2 = B^+B^-(w''_{\text{der}})^2 + B^+B^-(w''_{\text{iz}})^2 + (B^+w''_{\text{der}})^2 + \\ + (B^-w''_{\text{iz}})^2 = (B^++B^-)\{B^+(w''_{\text{der}})^2 + B^-(w''_{\text{iz}})^2\}$$

Poniendo esta correlación en la (13), hallamos que

$$\frac{B^+B^-}{h(B^++B^-)}(w_x-w_{\bar{x}})^2 = \frac{h}{4}\{B^+(w''_{\text{der}})^2 + B^-(w''_{\text{iz}})^2\} + O(h^3).$$

Comparando esta correlación con (12), nos convencemos de que la aproximación (11) tiene el error $O(h^3)$ cuando $\alpha = \infty$.

Sustituyamos ahora todas las aproximaciones, que acabamos de obtener, en (8) y hallaremos la aproximación de red de la funcional (7):

$$I_h(y) = \frac{1}{2}\left\{B^-\sum_{\omega_{\text{iz}}}(y_{\bar{x}x})^2 h + \sum_{\omega_{\text{der}}}(y_{\bar{x}x})^2 h - 2\sum_{\omega} qyh\right\} + \\ + \frac{\alpha}{2}\left\{1+\frac{\alpha h}{2}\left(\frac{1}{B^-}+\frac{1}{B^+}\right)\right\}^{-1}(y_x-y_{\bar{x}})^2 + \frac{\beta}{2}y^2(0). \quad (14)$$

Transformemos en la aproximación (14) los sumandos que se refieren al punto $x = 0$:

$$\frac{\alpha}{2}\left\{1+\frac{\alpha h}{2}\left(\frac{1}{B^-}+\frac{1}{B^+}\right)\right\}^{-1}(y_x-y_{\bar{x}})^2=$$

$$=\frac{\alpha h^2}{2}\left\{1+\frac{\alpha h}{2}\left(\frac{1}{B^-}+\frac{1}{B^+}\right)\right\}^{-1}(y_{\bar{x}x})^2=$$

$$=h\frac{B^-B^+}{B^-+B^+}\left\{1-\frac{1}{1+\frac{\alpha h}{2}\left(\frac{1}{B^-}+\frac{1}{B^+}\right)}\right\}(y_{xx})^2.$$

Designemos

$$\widetilde{B}=\begin{cases} B^-, & x\in\omega_{\text{iz}},\\ B^+, & x\in\omega_{\text{der}},\\ \dfrac{2B^-B^+}{B^-+B^+}\left\{1-\dfrac{1}{1+\frac{\alpha h}{2}\left(\frac{1}{B^-}+\frac{1}{B^+}\right)}\right\}, & x=0.\end{cases}$$

Empleando dicha designación, la aproximación (14) tomará la forma

$$I_h(y)=\frac{1}{2}\sum_{\omega}\widetilde{B}(x)(y_{\bar{x}x})^2+\frac{\beta}{2}y^2(0)-\sum_{\omega}q(x)\,y(x)\,h. \qquad (15)$$

Hemos construido la aproximación de la funcional (7). $I_h(y)$ es una función de las variables $y(x)$, siendo $x\in\omega$. Diferenciándola con respecto a $y(x)$ e igualando a cero las primeras derivadas, para x_i, siendo $i = 0, \pm 1, \ldots, \pm(N-2)$, obtendremos las siguientes ecuaciones:

$$(\widetilde{B}y_{\bar{x}x})_{\bar{x}x}-\beta\delta(x)\,y=q(x), \qquad (16)$$

$\delta(x)$ es la análoga de red de la función-delta.

Cuando $x = \pm 2h, \pm 3h, \ldots, \pm(1-2h)$, a base de la ecuación (16) se obtiene una aproximación corriente de la ecuación (5) del § 5

$$y_{\bar{x}x\bar{x}x}=\frac{q(x)}{B^{\pm}},$$

pero cuando $x = 0, \pm h$ tenemos una aproximación de las condiciones de conjugación (6). Investiguemos estas ecuaciones. Para sencillez supongamos que $B^- = B^+ = B$. Al efectuar unas transformaciones, a base de las ecuaciones (16), siendo $x = 0, \pm h$, hallamos las siguientes ecuaciones:

$$B\left(y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}x}(0)-\frac{1}{h(1+\alpha h/B)}y_{\bar{x}\bar{x}x}(0)-\frac{1}{h^2(1+\alpha h/B)}y_{\bar{x}\bar{x}}(0)\right)=q(-h),$$

$$B\left(y_{\bar{x}x\bar{x}x}(0)+\frac{2}{h^2(1+\alpha h/B)}y_{\bar{x}x}(0)\right)+\frac{\beta}{h}y(0)=q(0), \qquad (17)$$

$$B\left(y_{\bar{x}xxx}(0)+\frac{1}{h(1+\alpha h/B)}y_{\bar{x}xx}(0)-\frac{1}{h^2(1+\alpha h/B)}y_{xx}(0)\right)=q(h).$$

Mostremos que las ecuaciones (17) en efecto aproximan las condiciones de conjugación (6). Para ello escribamos primeramente las ecuaciones (17) del siguiente modo:

$$B\left(\frac{y_{\bar{x}xx}-y_{\bar{x}\bar{x}x}}{h}-\frac{1}{h(1+\alpha h/B)}\,y_{\bar{x}\bar{x}x}-\frac{1}{h^2(1+\alpha h/B)}\,y_{\bar{x}\bar{x}}\right)=q(-h),$$

$$B\left(\frac{y_{xx\bar{x}}-y_{x\bar{x}\bar{x}}}{h}+\frac{2}{h^2(1+\alpha h/B)}\,y_{\bar{x}x}\right)+\frac{\beta}{h}\,y=q(0), \qquad (18)$$

$$B\left(\frac{y_{xxx}-y_{xxx}}{h}+\frac{1}{h(1+\alpha h/B)}\,y_{\bar{x}xx}-\frac{1}{h^2(1+\alpha h/B)}\,y_{xx}\right)=q(h).$$

En éstas siempre el argumento es igual a cero, si no hay otras indicaciones. Adicionemos las correlaciones obtenidas y multipliquemos por h esta suma.

Después de simplificar obtendremos la aproximación de la última de las condiciones (6)

$$B(y_{xxx}-y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}})=-\beta y+3hq(0)+h^3q_{\bar{x}x}. \qquad (19)$$

Escribamos la primera y tercera ecuaciones de (18) en la siguiente forma

$$\frac{\alpha}{h(1+\alpha h/B)}\,y_{\bar{x}x}-B\left(\frac{1}{h^2}\,y_{\bar{x}\bar{x}}+\frac{1}{h}\,y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}\right)=q(-h),$$

$$B\left(\frac{1}{h}\,y_{xxx}-\frac{1}{h^2}\,y_{xx}\right)+\frac{\alpha}{h(1+\alpha h/B)}\,y_{\bar{x}x}=q(h). \qquad (20)$$

Descontemos de la primera ecuación de (20) la segunda y multipliquemos la diferencia por h^2:

$$B(y_{xx}-y_{\bar{x}\bar{x}})=hB(y_{xxx}+y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}})-h^2(q(h)-q(-h)). \qquad (21)$$

Esta es la aproximación de la tercera de las condiciones (6).

Por fin, reescribamos las ecuaciones (20) en la forma:

$$\frac{\alpha}{h^2(1+\alpha h/B)}(y_x-y_{\bar{x}})-B\left(\frac{1}{h^2}\,y_{\bar{x}\bar{x}}+\frac{1}{h}\,y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}\right)=q(-h),$$

$$B\left(\frac{1}{h}\,y_{xxx}-\frac{1}{h}\,y_{xx}\right)+\frac{\alpha}{h^2(1+\alpha h/B)}(y_x-y_{\bar{x}})=q(h).$$

Sumando estas correlaciones y multiplicando la suma por $h^2/2$, obtendremos la aproximación de la segunda condición de (6):

$$\frac{\alpha}{1+\alpha h/B}(y_x-y_{\bar{x}})=$$

$$=\frac{B}{2}(y_{xx}+y_{\bar{x}\bar{x}})-\frac{Bh}{2}(y_{xxx}-y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}})+h^2q+\frac{h^4}{2}\,q_{\bar{x}x}. \qquad (22)$$

Con auxilio de la comprobación directa es fácil convencerse de que las correlaciones (19), (21), (22) aproximan las condiciones (6) por lo menos con el error $O(h^2)$.

3. Aproximación de las condiciones de conjugación para las ecuaciones de cuarto orden con derivadas parciales. Construyamos la aproximación de las condiciones de conjugación (26) del § 5 para la ecuación (1) del § 5. Para simplificar algo los cálculos consideraremos que en las condiciones de conjugación $C^+ = C^- = 0$, $B^+ = B^- = \frac{B}{2}$ a la vez que en la ecuación (1) $D_{iz} = D_{der}$, donde, igual que más arriba, $v_{iz} = v(-0, x_2)$, $v_{der} = v(+0, x_2)$. Después de las suposiciones, que hemos hecho, las condiciones (26) del § 5 toman la forma

$$\begin{gathered}[w]=0, \quad \alpha\left[\frac{\partial w}{\partial x_1}\right]=D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right),\\ D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right]=0,\\ D\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x_2\,\partial x_2^2}\right]=-\beta w-B\frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4}, \qquad x_1=0.\end{gathered} \tag{23}$$

Las análogas de red de las condiciones (23) las construiremos como antes, o sea, según el método de aproximación de la funcional. Para esto dirijámonos a la funcional (24) del § 5, (23) del § 5, partiendo de la cual obtuvimos las condiciones (26) del § 5, y a base de las suposiciones, que hemos hecho, reescribámosla en la siguiente forma

$$I(w)=W-\int_{-l_1}^{l_1}\int_0^{l_2} q(x)\,w\,dx_1\,dx_2, \tag{24}$$

donde

$$W=W^+ + W^- + \frac{1}{2}\int_0^{l_2}\left\{\left[\alpha\frac{\partial w}{\partial x_1}\right]^2+\beta w^2+B\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2}\right)\right\}_{x_1=0} dx_2, \tag{25}$$

a su vez

$$W^+=\frac{D}{2}\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2+2\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}+\right.$$
$$\left.+2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2\right\}dx_1\,dx_2, \tag{26}$$

$$W^-=\frac{D}{2}\int_{-l_1}^{0}\int_0^{l_2}\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2+2\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}+\right.$$
$$+2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2 dx_1\,dx_2. \tag{27}$$

En el recinto $\overline{G}=\{x=(x_1, x_2)\mid -l_1\leqslant x_1\leqslant l_1,\ 0\leqslant x_2\leqslant l_2\}$ introduzcamos una red uniforme rectangular $\overline{\omega}=\overline{\omega}_1\times\overline{\omega}_2=\{x=(x_1, x_2)\mid x_\alpha\in\overline{\omega}_\alpha,\ \alpha=1, 2\}$, donde $\overline{\omega}_1$ y $\overline{\omega}_2$ son redes en los segmentos $[-l_1, l_1]$ y

$[0, l_2]$, respectivamente, además $\overline{\omega}_1 = \overline{\omega}_{1,\,\text{iz}} \cup \overline{\omega}_{1,\,\text{der}}$ y

$$\overline{\omega}_{1,\,\text{iz}} = \{x_1 \mid x_1 = i_1 h_1,\ i_1 = 0,\ -1,\ \ldots,\ -N_1\},$$
$$\overline{\omega}_{1,\,\text{der}} = \{x_1 \mid x_1 = i_1 h_1,\ i_1 = 0,\ 1,\ \ldots,\ N_1\}.$$

Sean ω_α el conjunto de los nodos interiores de la red $\overline{\omega}_\alpha$ y $\omega_{1,\,\text{iz}}\,(\omega_{1,\,\text{der}})$ el conjunto de los nodos interiores de la red $\overline{\omega}_{1,\,\text{iz}}$ $(\overline{\omega}_{1,\,\text{der}})$.

Induzcamos la designaciones

$$\omega = \omega_1 \times \omega_2,\ \omega_{\text{iz}} = \omega_{1,\,\text{iz}} \times \omega_2,\ \omega_{\text{der}} = \omega_{1,\,\text{der}} \times \omega_2,\ \dot{\gamma} = \omega \setminus \{\omega_{\text{iz}} \cup \omega_{\text{der}}\}.$$

Sea que además,

$$\omega^{+}_{1,\,\text{iz}} = \omega_1 \setminus \omega_{1,\,\text{der}},\ \omega^{+}_{1,\,\text{der}} = \overline{\omega}_1 \setminus \overline{\omega}_{1,\,\text{iz}},\ {}^{+}\omega_{1,\,\text{iz}} = \overline{\omega}_1 \setminus \overline{\omega}_{1,\,\text{der}}$$
$${}^{+}\omega_{1,\,\text{der}} = \omega_1 \setminus \omega_{1,\,\text{iz}}.$$

Como en el momento presente nos interesa sólo la aproximación de las condiciones de conjugación (23), por esta razón para sencillez supondremos que en la frontera del recinto G la función $w(x)$ verifica las condiciones (34) del § 5, es decir,

$$w = \frac{d^2 w}{\partial n^2} = 0.$$

Empleando las fórmulas de cuadratura, aproximamos las integrales de (24) — (27). Utilizamos las fórmulas de los trapecios para sustituir la integral del último sumando de (24) y las integrales de los tres primeros sumandos de (26), (27); haremos uso de las combinaciones lineales de las fórmulas de los rectángulos unilaterales para la aproximación de la última integral de (26) y de (27).

Teniendo en cuenta las condiciones de frontera para la función $w(x)$, supongamos que

$$\int_{-l_1}^{l_1}\int_{0}^{l_2} qw\,dx_1\,dx_2 \sim \sum_{\omega} qwh_1h_2,$$

$$W^-(w) \sim \frac{D}{2}\sum_{\omega_{\text{iz}}}\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2 + 2\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right\} h_1h_2 +$$
$$+\frac{(1-\nu)D}{4}\left\{\sum_{\omega^{+}_{1,\,\text{iz}}\times\omega^{+}_{2}}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2 h_1h_2 + \sum_{{}^{+}\omega_{1,\,\text{iz}}\times\omega^{+}_{2}}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2 h_1h_2 +\right.$$
$$\left.+\sum_{\omega^{+}_{1,\,\text{iz}}\times{}^{+}\omega_{2}}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2 h_1h_2 + \sum_{{}^{+}\omega_{1,\,\text{iz}}\times{}^{+}\omega_{2}}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2 h_1h_2\right\} +$$
$$+\frac{D}{2}\sum_{\dot{\gamma}}\frac{h_1h_2}{2}\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2 + 2\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right\},$$

$$W^{+}(w) \sim \frac{D}{2} \sum_{\omega_{der}} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right\} h_1 h_2 +$$

$$+ \frac{(1-\nu) D}{4} \left\{ \sum_{\omega_{1,\,der}^{+} \times \omega_2^{+}} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \, \partial x_2} \right)^2 h_1 h_2 + \sum_{{}^{+}\omega_{1,\,der} \times \omega_2^{+}} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \, \partial x_2} \right)^2 h_1 h_2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{\omega_{1,\,der}^{+} \times {}^{+}\omega_2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \, \partial x_2} \right)^2 h_1 h_2 + \sum_{{}^{+}\omega_{1,\,der} \times {}^{+}\omega_2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \, \partial x_2} \right)^2 h_1 h_2 \right\} +$$

$$+ \frac{D}{2} \sum_{\mathring{\gamma}} \frac{h_1 h_2}{2} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right\}.$$

Además, sea que

$$\frac{1}{2} \int_0^{l_2} \left\{ B \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right)^2 + \alpha \left[\frac{\partial w}{\partial x_1} \right]^2 + \beta w^2 \right\} dx_2 \sim$$

$$\sim \frac{1}{2} \sum_{\mathring{\gamma}} \left\{ B \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right)^2 + \alpha \left[\frac{\partial w}{\partial x_1} \right]^2 + \beta w^2 \right\} h_2.$$

Sustituyamos las segundas derivadas, que entran en las sumas de ω_{iz} y de ω_{der}, por las razones segundas en diferencias

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha^2} \sim w_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}.$$

Escribamos por separado las derivadas mixtas de cada una de las sumas. Sea que

$$W_{\bar{h}}(y) = \frac{D}{2} \sum_{\omega_{iz}} \{ (y_{\bar{x}_1 x_1})^2 + (y_{\bar{x}_2 x_2})^2 + 2\nu y_{\bar{x}_1 x_1} y_{\bar{x}_2 x_2} \} h_1 h_2 +$$

$$+ \frac{D(1-\nu)}{4} \left\{ \sum_{\omega_{1,\,iz}^{+} \times \omega_2^{+}} (y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2})^2 h_1 h_2 + \sum_{{}^{+}\omega_{1,\,iz} \times \omega_2^{+}} (y_{x_1 \bar{x}_2})^2 h_1 h_2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{\omega_{1,\,iz}^{+} \times {}^{+}\omega_2} (y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2})^2 h_1 h_2 + \sum_{{}^{+}\omega_{1,\,iz} \times {}^{+}\omega_2} (y_{x_1 x_2})^2 h_1 h_2 \right\}, \qquad (28)$$

$$W_{h}^{+}(y) = \frac{D}{2} \sum_{\omega_{der}} \{ (y_{\bar{x}_1 x_1})^2 + (y_{\bar{x}_2 x_2})^2 + 2\nu y_{\bar{x}_1 x_1} y_{\bar{x}_2 x_2} \} h_1 h_2 +$$

$$+ \frac{D(1-\nu)}{4} \left\{ \sum_{\omega_{1,\,der}^{+} \times \omega_2^{+}} (y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2})^2 h_1 h_2 + \sum_{{}^{+}\omega_{1,\,der} \times \omega_2^{+}} (y_{x_1 \bar{x}_2})^2 h_1 h_2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{\omega_{1,\,der}^{+} \times {}^{+}\omega_2} (y_{\bar{x}_1 x_2})^2 h_1 h_2 + \sum_{{}^{+}\omega_{1,\,der} \times {}^{+}\omega_2} (y_{x_1 x_2})^2 h_1 h_2 \right\}. \qquad (29)$$

Nos resta aproximar las derivadas en la suma $\sum_{\overset{\circ}{\gamma}} A(w) h_2$, donde

$$A(w) = \frac{Dh_1}{4}\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)_{\text{iz}}^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2 + 2\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)_{\text{iz}} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)_{\text{der}} + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2 + 2\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)_{\text{der}} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right\} + \frac{1}{2}\left\{\alpha\left[\frac{\partial w}{\partial x_1}\right]^2 + B\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2}\right)^2 + \beta w^2\right\}. \tag{30}$$

Supongamos que el coeficiente α es finito y no es igual a cero. Entonces, a base de las condiciones (23) hallamos que

$$\frac{D}{2}\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)_{\text{iz}}^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)_{\text{der}}^2\right\} = \frac{\alpha^2}{D}\left[\frac{\partial w}{\partial x_1}\right]^2.$$

Poniendo esta correlación en la (30), tendremos

$$A(w) = \frac{\alpha}{2}\left(1 + \frac{\alpha h_1}{D}\right)\left[\frac{\partial w}{\partial x_1}\right]^2 + \frac{1}{2}\{B + h_1 D(1-\nu^2)\}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + \frac{\beta}{2} w^2. \tag{31}$$

Escribamos la aproximación elemental de un salto de la derivada $[\partial w/\partial x_1]_{x_1=0}$ e investiguemos su error

$$(w_{x_1} - w_{\bar{x}_1})|_{x_1=0} = \left[\frac{\partial w}{\partial x_1}\right]\Big|_{x_1=0} + \frac{h_1}{2}\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)_{\text{der}} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)_{\text{iz}}\right\} + O(h_1^2) =$$
$$= \left[\frac{\partial w}{\partial x_1}\right]\Big|_{x_1=0} + \frac{h_1}{2}\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)_{\text{der}} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)_{\text{iz}}\right\} -$$
$$- h_1\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\Big|_{x_1=0} + O(h^2).$$

Partiendo de las condiciones (23) hallamos que

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)_{\text{der}} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)_{\text{iz}} = \frac{2\alpha}{D}\left[\frac{\partial w}{\partial x_1}\right]\Big|_{x_1=0},$$

y, por consiguiente,

$$(w_{x_1} - w_{\bar{x}_1})\Big|_{x_1=0} = \left(1 + \frac{\alpha h_1}{D}\right)\left[\frac{\partial w}{\partial x_1}\right]_{x_1=0} - h_1\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\Big|_{x_1=0} + O(h_1^2).$$

Por lo tanto

$$\left[\frac{\partial w}{\partial x_1}\right]\Big|_{x_1=0} = \frac{1}{1 + \alpha h_1/D}\left\{(w_{x_1} - w_{\bar{x}_1})\Big|_{x_1=0} + h_1\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\Big|_{x_1=0} + O(h_1^2)\right\}.$$

Poniendo esta expresión en la (31) y sustituyendo $\partial^2 w/\partial x_2^2$ por la segunda razón en diferencias, obtendremos

$$A(w) = \frac{\alpha}{2}\frac{1}{1 + \alpha h_1/D}\{(w_{x_1} - w_{\bar{x}_1}) + h_1\nu w_{\bar{x}_2 x_2} + O(h_1^2 + h_2^2)\} +$$
$$+ \frac{1}{2}\{B + h_1 D(1-\nu)^2\}(w_{\bar{x}_2 x_2})^2 + \frac{\beta}{2} w^2 + O(h_2^2). \tag{32}$$

Analicemos los casos límites, cuando $\alpha = 0$ y $\alpha = \infty$. Suponiendo en (30) que $\alpha = 0$ y teniendo en cuenta las condiciones (23), hallamos que

$$A(w) = \frac{1}{2}\{B + h_1 D(1-\nu^2)\}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2 + \frac{\beta}{2} w^2.$$

Precisamente esta expresión se aproxima con el error $O(h_2^2)$ por los términos principales escritos en (32), siendo $\alpha = 0$. Pasemos ahora al límite en (30) cuando $\alpha \to \infty$. Atendiendo las mismas condiciones (23), hallamos que

$$A(w) = \frac{Dh_1}{2}\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1}\right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right\} + \frac{1}{2}\left\{\left(B + \frac{Dh_1}{2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2}\right)^2 + \beta w^2\right\}.$$

Cuando $\alpha \to \infty$ la correlación (32) toma la forma

$$A(w) = \frac{Dh_1}{2}\{w_{\bar{x}_1 x_1} + \nu w_{\bar{x}_2 x_2} + O(h_1 + h_2^2/h_1)\}^2 + \\ + \frac{1}{2}\{B + h_1 D(1-\nu^2)\}(w_{\bar{x}_2 x_2})^2 + \frac{\beta}{2} w^2 + O(h_2^2)$$

y, por consiguiente, sus términos principales aproximan (30) con el error $O(h_1^2 + h_2^2)$.

De esta forma,

$$W_h^0(y) = \frac{1}{2}\sum_{\overset{\bullet}{\gamma}} h_2 \left\{\frac{\alpha}{1+\alpha h_1/D}(y_{x_1} - y_{\bar{x}_1})^2 + \right. \\ + \left[B + h_1 D\left(1 - \frac{\nu^2}{1+\alpha h_1/D}\right)\right](y_{x_2 x_2})^2 + \\ \left. + \frac{2h_1\alpha\nu}{1+\alpha h_1/D}(w_{x_1} - w_{x_1}) w_{x_2 x_2}\right\}. \qquad (33)$$

En tal caso la aproximación de red de la funcional $I(w)$ de (24) tendrá la forma

$$I_h(y) = W_h(y) - \sum_{\omega} q y h_1 h_2, \qquad (34)$$

donde

$$W_h(y) = W_{\bar{h}}(y) + W_h^+(y) + W_h^0(y),$$

y $W_h^-(y)$, $W_h^+(y)$ y $W_h^0(y)$ se determinan a base de las correlaciones (28), (29) y (33).

Transformemos algo $W_h^0(y)$. Señalando que

$$(y_{x_1} - y_{\bar{x}_1})^2 = h_1^2 (y_{\bar{x}_1 x_1})^2, \quad \frac{\alpha h_1}{1+\alpha h_1/D} = D\left(1 - \frac{1}{1+\alpha h_1/D}\right),$$

para $W_h^0(y)$ obtenemos la representación

$$W_h^0(y)=\frac{h_1}{2}\sum_{\overset{\circ}{\gamma}} h_2 D\left\{\left(1-\frac{1}{1+\alpha h_1/D}\right)(y_{\bar{x}_1x_1})^2+\right.$$
$$\left.+\left(1-\frac{\nu^2}{1+\alpha h_1/D}+\frac{B}{Dh_1}\right)(y_{\bar{x}_2x_2})^2+2\left(1-\frac{1}{1+\alpha h_1/D}\right)\nu y_{\bar{x}_1x_1}y_{\bar{x}_2x_2}\right\}.$$

Comparemos las expresiones que figuran bajo el signo de suma en la fórmula para $W_h^0(y)$ y bajo los signos de suma en las fórmulas para $W_h^{\pm}(y)$ con respecto a $\omega_{1\text{iz}(\text{der})}$; éstas difieren entre sí sólo en los coeficientes de las razones en diferencias.

Introduzcamos las designaciones

$$\begin{gathered}D_1=D\left(1-\frac{h_1}{1+\alpha h_1/D}\delta(x_1)\right),\\ D_2=D\left(1-\left(\frac{\nu^2h_1}{1+\alpha h_1/D}-\frac{B}{D}\right)\delta(x_1)\right),\quad D_{\text{tor}}=D\frac{1-\nu}{2},\end{gathered}\tag{35}$$

donde $\delta(x_1)$ es análoga de red de la función-delta

$$\delta(x_1)=\begin{cases}h_1^{-1}, & x_1=0,\\ 0, & x_1\in\omega_1,\ x_1\neq 0.\end{cases}$$

Con las nuevas designaciones $W_h(y)$ tomará la forma

$$W_h(y)=\frac{1}{2}\sum_{\omega} h_1h_2\{D_1(y_{\bar{x}_1x_1})^2+D_2(y_{\bar{x}_2x_2})^2+2D_1\nu y_{\bar{x}_1x_1}y_{\bar{x}_2x_2}\}+$$
$$+\frac{D_{\text{tor}}}{2}\left\{\sum_{\omega_1^+\times\omega_2^+} h_1h_2(y_{\bar{x}_1\bar{x}_2})^2+\sum_{^+\omega_1\times\omega_2^+} h_1h_2(y_{x_1\bar{x}_2})^2+\right.$$
$$\left.+\sum_{\omega_1^+\times{}^+\omega_2} h_1h_2(y_{\bar{x}_1x_2})^2+\sum_{^+\omega_1\times{}^+\omega_2} h_1h_2(y_{x_1x_2})^2\right\}+\frac{1}{2}\sum_{\omega} h_1h_2\beta\delta(x_1)y^2.\tag{36}$$

$I_h(y)$ de (34) es la función de las variables $y(x)$, siendo $x\in\omega$. Diferenciándola con respecto a $y(x)$, siendo $x_1\neq\pm(l_1-h_1)$, $x_2\neq h_2$, l_2-h_2 e igualando a cero las derivadas, obtendremos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{gathered}(D_1y_{\bar{x}_1x_1})_{\bar{x}_1x_1}+(D_2y_{\bar{x}_2x_2})_{\bar{x}_2x_2}+(D_1\nu y_{\bar{x}_1x_1})_{\bar{x}_2x_2}+\\ +(D_1\nu y_{\bar{x}_2x_2})_{\bar{x}_1x_1}+4D_{\text{tor}}y_{\bar{x}_1x_1\bar{x}_2x_2}+\beta\delta(x_1)y=q(x),\\ x_1\neq\pm(l_1-h_1),\quad x_2\neq h_2,\quad l_2-h_2.\end{gathered}\tag{37}$$

Suponiendo en las (37) $x_1=0$, $\pm h_1$, obtenemos las aproximaciones de red de las condiciones de conjugación (23). Después de unas

cuantas transformaciones las ecuaciones indicadas toman la forma:

$$D\left\{y_{\bar{x}_1x_1\bar{x}_1x_1}-\frac{1}{h_1(1+\alpha h_1/D)}y_{\bar{x}_1x_1x_1}-\frac{1}{h_1^2(1+\alpha h_1/D)}y_{\bar{x}_1x_1}+y_{\bar{x}_2x_2\bar{x}_2x_2}+\right.$$

$$\left.+2y_{\bar{x}_1x_1\bar{x}_2x_2}-\frac{\nu}{h_1(1+\alpha h_1/D)}y_{x_1\bar{x}_2x_2}-\frac{\nu}{h_1^2(1+\alpha h_1/D)}y_{\bar{x}_2x_2}\right\}=q,$$

$$x=(-h_1,\ x_2),$$

$$D\left\{y_{\bar{x}_1x_1\bar{x}_1x_1}+\frac{1}{h_1^2(1+\alpha h_1/D)}y_{\bar{x}_1x_1}+\left(1-\frac{\nu^2}{1+\alpha h_1/D}+\frac{B}{Dh_1}\right)y_{\bar{x}_2x_2\bar{x}_2x_2}+\right.$$

$$\left.+\left(2-\frac{1}{1+\alpha h_1/D}\right)y_{\bar{x}_1x_1\bar{x}_2x_2}+\frac{2\nu y_{\bar{x}_2x_2}}{h_1^2(1-\alpha h_1/D)}+\frac{B}{h_1}y=q,\quad x=(0,\ x_2)\right.$$

$$D\left\{y_{\bar{x}_1x_1\bar{x}_1x_1}+\frac{1}{h_1(1+\alpha h_1/D)}y_{\bar{x}_1\bar{x}_1x_1}-\frac{1}{h_1^2(1+\alpha h_1/D)}y_{\bar{x}_1x_1}+\right.$$

$$+y_{\bar{x}_2x_2\bar{x}_2x_2}+2y_{x_1\bar{x}_1\bar{x}_2x_2}+\frac{\nu}{h_1(1+\alpha h_1/D)}y_{\bar{x}_1\bar{x}_2x_2}-$$

$$\left.-\frac{\nu}{h_1^2(1+\alpha h_1/D)}y_{\bar{x}_2x_2}\right\}=q,\quad x=(h_1,\ x_2).$$

Lo mismo que en el caso de las ecuaciones (18), estas ecuaciones pueden transformarse a la forma la que mostrará que las ecuaciones construidas aproximan las condiciones (23) con el error $O(h_1^2+h_2^2)$.

4. Aproximación de las condiciones de frontera para una ecuación diferencial corriente de cuarto orden. Vamos a aproximar las condiciones de frontera (28) del § 5 para la ecuación (5) del § 5, pero en vez de las condiciones homogéneas consideraremos las heterogéneas:

$$-Bw''+\alpha(w'-w_0')=M_0,\quad Bw''+\beta(w-w_0)=Q_0,\quad x=0. \tag{38}$$

Aquí w_0, w_0', M_0 y Q_0 son constantes preestablecidas; (las magnitudes w_0 y w_0' están introducidas para comodidad).

Sea que la ecuación (5) del § 5 se considera en un segmento $[0,\ l]$, además cuando $x=l$ su solución satisface las condiciones: $w(l)=w''(l)=0$, y cuando $x=0$ su solución satisface las condiciones (38). Examinemos la funcional

$$I(w)=W(w)-\int_0^l qw\,dx-Q(\beta)\,w(0)-M(\alpha)\,w'(0), \tag{39}$$

donde

$$W(w)=\frac{B}{2}\int_0^l (w'')^2\,dx+\frac{\alpha}{2}(w'(0))^2+\frac{\beta}{2}w^2(0), \tag{40}$$

$$Q(\beta)=Q_0+\beta w_0,\qquad M(\alpha)=M_0+\alpha w_0'.$$

Es fácil comprobar que las condiciones de frontera (38) y la ecuación (5) del § 5 son las condiciones necesarias para que la primera variación de la funcional (39) se reduzca a cero.

Las análogas en diferencias de las condiciones de frontera (38) las construiremos según el método de aproximación de la funcional (39). Sea $\bar{\omega}$ una red uniforme sobre el segmento $[0, l]$. Aproximemos las integrales, las cuales figuran en (39) y (40), empleando las fórmulas de cuadratura de los trapecios, y tengamos en cuenta las condiciones de frontera, siendo $x = l$:

$$\int_0^l qw\,dx \sim \sum_{\omega} qwh + \frac{q(0)\,w(0)}{2}\,h,$$

$$\frac{B}{2}\int_0^l (w'')^2\,dx \sim \frac{B}{2}\sum_{\omega} (w'')^2 h + \frac{B}{2}(w''(0))^2\,\frac{h}{2}.$$

Las segundas derivadas en la suma con respecto a ω cambiémoslas por segundas razones en diferencias

$$w'' \sim w_{\bar{x}x}.$$

Entonces tendremos

$$I(w) \sim \frac{B}{2}\sum_{\omega} (w_{\bar{x}x})^2 h - \sum_{\omega} qwh + \frac{1}{2}\left(\frac{Bh}{2}(w''(0))^2 + \alpha(w'(0))^2 - \right.$$
$$\left. - 2M(\alpha)\,w'(0)\right) + \frac{1}{2}\left(\beta w^2(0) - qhw(0) - 2Q(\beta)\,w(0)\right).$$

Construyamos la aproximación de la ecuación

$$A(w) = \frac{1}{2}\left\{\frac{Bh}{2}(w''(0))^2 + \alpha(w'(0))^2 - 2M(\alpha)\,w'(0)\right\}.$$

En virtud de (38) tenemos

$$w''(0) = \frac{\alpha w'(0) - M(\alpha)}{B},$$

y, por consiguiente,

$$A(w) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\alpha h}{2B}\right)\left[\alpha(w'(0))^2 - 2M(\alpha)\,w'(0)\right] + hM^2(\alpha)/(4B). \quad (41)$$

Aproximemos en (41) la primera derivada por la primera razón en diferencias

$$w_x = w' + \frac{h}{2}\,w'' + O(h^2).$$

Tomando en consideración la primera de las condiciones de frontera (38), hallamos que

$$w_x = \left(1 + \frac{\alpha h}{2B}\right) w' - \frac{h}{2B}\,M(\alpha) + O(h^2),$$

ó

$$w'(0)=\frac{1}{1+\alpha h/(2B)}\left(w_x+\frac{h}{2B}M(\alpha)\right)+O(h^2).$$

Poniendo esta correlación en (41) y omitiendo la magnitud $O(h^2)$, obtenemos la aproximación pedida de $A(w)$:

$$A_h(w)=\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+\alpha h/(2B)}\,(\alpha(w_x)^2-2M(\alpha)w_x)-\frac{hM^2(\alpha)}{4B(1+\alpha h/(2B))}.$$

De este modo, la aproximación de red de la funcional $I(w)$ nos resulta de la forma

$$I_h(y)=\frac{B}{2}\sum_{\omega}(y_{\bar{x}x})^2h-$$
$$-\sum_{\omega}qyh+\frac{1}{2(1+\alpha h/(2B))}(\alpha(y_x)^2-2M(\alpha)y_x)|_{x=0}+$$
$$+\frac{1}{2}(\beta y^2(0)-qhy(0)-2Q(\beta)y(0))-\frac{hM^2(\alpha)}{4B(1+\alpha h/(2B))}. \qquad (42)$$

Diferenciando ahora la aproximación (42) con respecto a $y(0)$ e $y(h)$ e igualando a cero las derivadas, hallamos las siguientes aproximaciones de las condiciones de frontera (38):

$$-\frac{\alpha}{h(1+\alpha h/(2B))}y_x+\frac{1}{h}By_{xx}+\beta y+\frac{M(\alpha)}{h(1+\alpha h/(2B))}-$$
$$-Q(\beta)-\frac{q(0)h}{2}=0, \qquad (43)$$

$$-\frac{B}{h}y_{xx}+By_{xxx}+\frac{\alpha y_x}{h(1+\alpha h/(2B))}-\frac{M(\alpha)}{h(1+\alpha h/(2B))}-hq(h)=0.$$

Sumando estas correlaciones, obtendremos la aproximación de la segunda de las condiciones (38); multiplicando por $-h$ la primera correlación, hallaremos la aproximación de la primera de las condiciones (38)

$$-By_{xx}+\frac{\alpha}{1+\alpha h/(2B)}(y_x-w_0')-h\beta(y-w_0)=$$
$$=\frac{M_0}{1+\alpha h/(2B)}-hQ_0-\frac{h^2q(0)}{2}, \qquad (44)$$
$$By_{xxx}+\beta(y-w_0)=Q_0+h\left(\frac{q(0)}{2}+q(h)\right),\quad x=0.$$

Es fácil comprobar que, siendo β finito, para cualesquiera que sean σ las condiciones (44) aproximan las condiciones (38) con el error $O(h^2)$.

Si $\beta=\infty$, entonces, a base de (43) hallamos que

$$y=w_0,\quad x=0.$$

Esta es la aproximación de una de las condiciones (38) en dicho caso.

5. Aproximación de las condiciones de frontera para las ecuaciones diferenciales con derivadas parciales de cuarto orden. Supongamos que en el dominio $G = \{x = (x_1, x_2) \mid 0 < x_\alpha < l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$ se busca la solución de la ecuación (1) del § 5

$$D\Delta^2 w = q, \qquad x \in G, \tag{45}$$

que cuando $x_1 = 0$ verifique las condiciones de frontera heterogéneas del tipo (31) del § 5, siendo $C = 0$:

$$\alpha \frac{\partial w}{\partial x_1} = D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right) + M, \qquad x_1 = 0,$$
$$D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial x_2^2}\right) = -\beta w - B\frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} + Q, \qquad x_1 = 0, \tag{46}$$

y cuando $x_1 = l_1$ y $x_2 = 0$, l_2, verifique las condiciones de frontera del tipo (34) del § 5:

$$w(x_1, 0) = w(l_1, x_2) = w(x_1, l_2) = \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}(l_1, x_2) =$$
$$= \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}(x_1, l_2) = \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}(x, 0) = 0. \tag{47}$$

En virtud de (37) del § 5 cuando $\alpha \neq \infty$ en los puntos angulares $(0, 0)$ y $(0, l_2)$ del dominio deben verificarse las condiciones de adaptación, las cuales en el caso en cuestión tienen la forma:

$$B\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} = 0, \qquad x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \ l_2. \tag{48}$$

Construyamos las análogas de red de las condiciones de frontera (46). Realizaremos la construcción según el método de aproximación de la funcional.

Es fácil comprobar que la solución $w(x)$ del problema (45) — (48) aporta el mínimo para la funcional

$$I(w) = W - \int_0^{l_1}\int_0^{l_2} q(x)\, w\, dx -$$
$$- \int_0^{l_2} \left\{M(x_2)\frac{\partial w}{\partial x_1} + Q(x_2)\, w\right\}\Big|_{x_1=0} dx_2, \tag{49}$$

donde

$$\mathring{W} = \mathring{W} + W,$$

$$W(w) = \frac{D}{2}\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2 + 2\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \right.$$
$$\left. + 2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2\right\} dx_1\, dx_2, \tag{50}$$

$$W(w) = \frac{1}{2}\int_0^{l_2}\left\{B\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2 + \alpha\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2 + \beta w^2\right\}\Big|_{x_1=0} dx_2,$$

la cual la aproximaremos sobre la red rectangular uniforme $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2$. Ya aproximábamos las funcionales de este tipo, así que, valiéndonos de las condiciones de frontera (47), escribamos de una vez

$$\int_0^{l_1}\int_0^{l_2} q(x)\,w(x)\,dx_1\,dx_2 \sim \sum_{\omega} qwh_1h_2 + \sum_{\omega_2} \frac{h_1}{2}h_2qw\Big|_{x_1=0}, \qquad (51)$$

$$\int_0^{l_2}\left\{M\frac{\partial w}{\partial x_1} + Qw\right\}\Big|_{x_1=0} dx_2 \sim \sum_{\omega_2}\left(M\frac{\partial w}{\partial x_1} + Qw\right)\Big|_{x_1=0} h_2.$$

Proseguimos, tomando en consideración las condiciones de adaptación (48),

$$\mathring{W} \sim \frac{D}{2}\sum_{\omega}\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2 + 2\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right\}h_1h_2 +$$

$$+ D(1-\nu)\sum_{\omega_1^+\times\omega_2^+}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2 h_1h_2 + \frac{D}{2}\sum_{\omega_2}\frac{h_1h_2}{2}\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)^2 +\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2 + 2\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right\}\Big|_{x_1=0}, \qquad (52)$$

$$W_1 \sim \frac{1}{2}\sum_{\omega_2}\left\{B\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2 + \alpha\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right) + \beta w^2\right\}\Big|_{x_1=0} h_2.$$

En la primera de las correlaciones (52) reemplazemos las derivadas que figuran bajo el signo $\sum_{\omega}$ por las razones en diferencias $w_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}$, $\alpha = 1, 2$, y las derivadas mixtas por las razones en diferencias $w_{\bar{x}_1\bar{x}_2}$, después designemos

$$\mathring{W}^h(y) = \frac{D}{2}\sum_{\omega}\{(w_{\bar{x}_1x_1})^2 + (w_{\bar{x}_2x_2})^2 + 2\nu w_{\bar{x}_1x_1}w_{\bar{x}_2x_2}\}h_1h_2 +$$

$$+ D(1-\nu)\sum_{\omega_1^+\times\omega_2^+}(w_{\bar{x}_1\bar{x}_2})^2 h_1h_2. \qquad (53)$$

Estudiaremos aparte la aproximación de las derivadas que figuran bajo el signo $\sum_{\omega_2}$ en (51) y (52). A base de las sumas de ω_2 de (51)

y (52) compongamos la expresión

$$I_1(w)=\frac{1}{2}\sum_{\omega_2} h_2\Big\{B\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2+\alpha\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2+\beta w^2+$$
$$+\frac{Dh_1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2+(1-\nu^2)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2\right]-$$
$$-2M\frac{\partial w}{\partial x_1}-2Qw-h_1qw\Big\}\Big|_{x_1=0}, \qquad (54)$$

la cual forma parte de la aproximación de la funcional $I(w)$ mediante fórmulas de cuadratura. La proximación de las segundas derivadas con respecto a x_2, que entran en la (54), no provoca dificultades algunas, así que concentremos la atención en la aproximación de la expresión

$$A(w)=\alpha\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2+\frac{Dh_1}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2-2M\frac{\partial w}{\partial x_1}.$$

Partiendo de la primera de las condiciones de frontera (46), tendremos

$$A(w)=\alpha\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2+\frac{h_1}{2D}\left(\alpha\frac{\partial w}{\partial x_1}-M\right)^2-2M\frac{\partial w}{\partial x_1}=$$
$$=\left(1+\frac{h_1\alpha}{2D}\right)\left[\alpha\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2-2M\frac{\partial w}{\partial x_1}\right]+\frac{h_1}{2D}M^2.$$

Ahora $A(w)$ se expresa sólo a través de la primera derivada $\partial w/\partial x_1$, mientras que el procedimiento de aproximación de ésta ya hemos discutido más de una vez. Poniendo en la descomposición

$$w_{x_1}=\frac{\partial w}{\partial x_1}+\frac{h_1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+O(h_1^2), \qquad x_1=0$$

la segunda derivada que entra en la condición de frontera (46), obtendremos

$$w_{x_1}=\left(1+\frac{h_1\alpha}{2D}\right)\frac{\partial w}{\partial x_1}-\frac{h_1\nu}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}-\frac{h_1M}{2D}+O(h_1^2).$$

De aquí hallamos que

$$\frac{\partial w}{\partial x_1}=\left(1+\frac{h_1\alpha}{2D}\right)^{-1}\left[w_{x_1}+\frac{h_1\nu}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}+\frac{h_1M}{2D}-O(h_1^2)\right]$$

y, por consiguiente,

$$A(w)=\alpha\left(1+\frac{h_1\alpha}{2D}\right)^{-1}\left[w_{x_1}+\frac{h_1\nu}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}+\frac{h_1M}{2D}-O(h_1^2)^2\right]-$$
$$-2M\left[w_{x_1}+\frac{h_1\nu}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}+\frac{h_1M}{2D}+O(h_1^2)\right]+\frac{h_1}{2D}M^2.$$

Pongamos esta expresión para $A(w)$ en (54), hagamos la sustitución de las segundas derivadas respecto a x_2 por las segundas razones de

diferencias $w_{\bar{x}_2 x_2}$ y omitamos los términos designados con $O(h_1^2)$. La expresión obtenida la notemos con $I_1^h(w)$, es decir,

$$I_1^h(w) = \frac{1}{2} \sum_{\omega_2} h_2 \left\{ B (w_{\bar{x}_2 x_2})^2 + \beta w^2 + \frac{Dh_1}{2} (1-\nu^2)(w_{\bar{x}_2 x_2})^2 + \right.$$
$$+ \frac{\alpha}{1+\frac{h_1\alpha}{2D}} \left(w_{x_1} + \frac{h_1\nu}{2} w_{\bar{x}_2 x_2} + \frac{h_1 M}{2D} \right)^2 - 2Qw -$$
$$\left. - h_1 q w - 2M \left(w_{x_1} + \frac{h_1\nu}{2} w_{\bar{x}_2 x_2} \right) - \frac{h_1}{2D} M^2 \right\}. \qquad (55)$$

De esta forma, aproximaremos la funcional (49), (50) por medio de la funcional de red

$$I^h(w) = \mathring{W}^h(w) + I_1^h(w) + \sum_{\omega} q w h_1 h_2, \qquad (56)$$

donde $\mathring{W}^h(w)$ e $I_1^h(w)$ se determinan según las fórmulas (53) y (55) respectivamente.

Para construir las aproximaciones de red de las condiciones de frontera (46), es necesario diferenciar la funcional de red (56) con respecto a $w(x_1, x_2)$, siendo $x_1 = 0$, h_1 y $x_2 \in \mathring{\omega}_2$, y luego igualar a cero las expresiones obtenidas. Después de multiplicar por $h_1 h_2^{-1}$ estas correlaciones (siendo $x_1 = 0$, $x_2 \in \mathring{\omega}_2$) tendremos:

$$D (w_{\bar{x}_1 x_1} + \nu w_{\bar{x}_2 x_2})^{(+1_1)} + 2D(1-\nu) h_1 w_{x_1 \bar{x}_2 x_2} +$$
$$+ h_1 \left\{ B w_{\bar{x}_2 x_2 \bar{x}_2 x_2} + \beta w + \frac{h_1}{2} D (1-\nu^2) w_{\bar{x}_2 x_2 \bar{x}_2 x_2} - \right.$$
$$- \frac{\alpha}{h_1 (1 + h_1\alpha/(2D))} \left(w_{x_1} + \frac{h_1\nu}{2} w_{\bar{x}_2 x_2} + \frac{h_1 M}{2D} \right) +$$
$$+ \frac{h_1 \nu \alpha}{2(1+h_1\alpha/(2D))} \left(w_{x_1 \bar{x}_2 x_2} + \frac{h_1\nu}{2} w_{\bar{x}_2 x_2 \bar{x}_2 x_2} + \frac{h_1\nu}{2} M_{\bar{x}_2 x_2} \right) -$$
$$\left. - Q - \frac{h_1}{2} q + \frac{M}{h_1} - \frac{h_1\nu}{2} M_{\bar{x}_2 x_2} \right\} = 0, \qquad (57)$$

$$\frac{\alpha}{1+h_1\alpha/(2D)} \left(w_{x_1} + \frac{h_1\nu}{2} w_{\bar{x}_2 x_2} \right) - D (w_{\bar{x}_1 x_1} + \nu w_{\bar{x}_2 x_2})^{(+1_1)} +$$
$$+ D h_1 (w_{\bar{x}_1 x_1 x_1} + \nu w_{\bar{x}_2 x_2 x_1} - q]^{(+1_1)} + h_1^2 D [w_{\bar{x}_2 x_2 \bar{x}_2 x_2} +$$
$$+ (2-\nu) w_{\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_1 x_2} - q)^{(+1_1)} - \frac{M}{1 + h_1\alpha/(2D)} = 0. \qquad (58)$$

Es fácil comprobar que la ecuación (58) aproxima la primera de las condiciones de frontera (46) con el error $O(|h|^2)$. Sumando

(57) y (58) y dividiendo el resultado en h_1, obtendremos la aproximación de la segunda condición de (46):

$$D\left(w_{\bar{x}_1x_1x_1} + (2-\nu)\, w_{\bar{x}_2x_2x_1}\right)^{(+1_1)} + Bw_{\bar{x}_2x_2\bar{x}_2x_2} + \beta w + Q +$$
$$+ \frac{h_1\nu}{2}\,\frac{\alpha}{1+h_1\alpha/(2D)}\left(w_{x_1\bar{x}_2x_2} + \frac{h_1\nu}{2}\, w_{\bar{x}_2x_2\bar{x}_2x_2}\right) +$$
$$+ \frac{h_1}{2} D\,(1-\nu^2)\, w_{\bar{x}_2x_2\bar{x}_2x_2} + h_1 D\left(w_{\bar{x}_2x_2\bar{x}_2x_2} + \nu w_{\bar{x}_1\bar{x}_2x_1x_2}\right)^{(+1_1)} -$$
$$- \frac{h_1}{2}\, q - h_1 q^{(+1_1)} - \frac{h_1\nu}{2} M_{\bar{x}_2x_2} + \frac{\alpha h_1\nu}{2\,(1+h_1\alpha/(2D))}\,\frac{h_1}{2D} M_{\bar{x}_2x_2} = 0. \qquad (59)$$

La ecuación (59) aproxima la segunda condición de las de frontera (46) con el error $O(|h|^2)$.

CAPÍTULO V

APARATO MATEMÁTICO DE LA TEORÍA DE LOS ESQUEMAS EN DIFERENCIAS

El presente capítulo tiene el caracter auxiliar. En éste se introducen algunas de las designaciones que se usan con más frecuencia en lo sucesivo y se deducen las fórmulas fundamentales, con cuya ayuda se transforman las expresiones que contienen funciones de red. Después se exponen los métodos principales de obtención de las acotaciones apriorísticas y de investigación de la convergencia de los esquemas en diferencias. Estos métodos se ilustran en el ejemplo de problemas unidimensionales. Luego se estudian los análogos de red de los teoremas de encajamiento y se deducen las acotaciones de abajo para algunos operadores de red. Estos resultados se utilizan al obtener las acotaciones apriorísticas y al investigar la velocidad de convergencia de los esquemas en diferencias en el cap. VI.

§ 1. Designaciones, fórmulas en diferencias y algunas desigualdades

1. Designaciones. Sea $\bar{\omega} = \{x = x_i \mid i = 0, 1, \ldots, N; x_0 = 0, x_N = l\}$ una red en el segmento $[0, l]$. El paso de la red en el punto x_i se prefija por la magnitud $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots$, mientras que el paso medio, por la magnitud $\hbar_i = (h_i + h_{i+1})/2$, $i = 1, 2, \ldots, N - 1$. Supongamos $\hbar_0 = h_1/2$, $\hbar_N = h_N/2$. Si en todos los nodos de la red el paso es el mismo, es decir, $h = l/N$, entonces, la red $\bar{\omega}$ se denomina *uniforme*.

Introduzcamos las siguientes designaciones:

$$\omega = \{x_i \mid i = 1, 2, \ldots, N-1\}, \quad \mathring{\omega} = \{x_i \mid, \quad i = 2, 3, \ldots, N-2\},$$
$$\omega^+ = \{x_i \mid i = 1, 2, \ldots, N\}, \qquad {}^+\omega = \{x_i \mid, \quad i = 0, 1, \ldots, N-1\}.$$

Sean $v(x)$ y $w(x)$ funciones de red determinadas preestablecidas en la red $\bar{\omega}$. Definamos el *producto escalar* de estas funciones me-

diante la siguiente fórmula:

$$(v,\ w)_{\bar{\omega}} = \sum_{i=0}^{N} v(x_i)\, w(x_i)\, \hbar_i. \qquad (1)$$

Si $v(x_i)$ y $w(x_i)$ se consideran como valores, en la red $\bar{\omega}$, de las funciones $v(x)$ y $w(x)$ del argumento continuo $x \in [0,\ l]$, entonces, el producto escalar (1) representa en sí la fórmula de cuadratura de los trapecios para la integral

$$\int_0^l v(x)\, w(x)\, dx. \qquad (2)$$

Además del producto escalar (1), definible para las funciones de red indicadas en la red $\bar{\omega}$, nos necesitarán en lo sucesivo los productos escalares para las funciones de red preestablecidas en las ω^+, $^+\omega$, ω y $\overset{\circ}{\omega}$. Sea que

$$(v,\ w)_{\omega^+} = \sum_{i=1}^{N} v(x_i)\, w(x_i)\, h_i, \qquad (3)$$

$$(v,\ w)_{^+\omega} = \sum_{i=0}^{N-1} v(x_i)\, w(x_i)\, h_{i+1}, \qquad (4)$$

$$(v,\ w)_{\omega} = \sum_{i=1}^{N-1} v(x_i)\, w(x_i)\, \hbar_i, \qquad (5)$$

$$(v,\ w)_{\overset{\circ}{\omega}} = \sum_{i=2}^{N-2} v(x_i)\, w(x_i)\, \hbar_i.$$

El producto escalar (3) puede interpretarse como fórmula de cuadratura de los rectángulos derechos para la integral (2) y el (4), como fórmula de cuadratura de los rectángulos izquierdos para la misma integral. Se comprueba fácilmente que

$$(v,\ w)_{\bar{\omega}} = \frac{1}{2}\left[(v,\ w)_{\omega^+} + (v,\ w)_{^+\omega}\right].$$

A veces, si no surgen incomprensiones, el subíndice que señala en cuál red se realiza la suma, lo omitiremos y escribiremos simplemente $(v,\ w)$.

2. Fórmulas en diferencias. Para transformar las expresiones que contienen razones en diferencias de las funciones de red son útiles las fórmulas para tomar una razón en diferencias a base del producto. Empleando las definiciones de las razones en diferencias,

no es difícil comprobar que tienen lugar las siguientes fórmulas:

$$(vw)_{\bar{x},i}=v_{\bar{x},i}w_{i-1}+v_iw_{\bar{x},i}=v_{\bar{x},i}w_i+v_{i-1}w_{\bar{x},i}=$$
$$=v_{\bar{x},i}w_i+v_iw_{\bar{x},i}-h_iv_{\bar{x},i}w_{\bar{x},i}, \qquad (6)$$
$$(vw)_{x,i}=v_{x,i}w_{i+1}+v_iw_{x,i}=v_{x,i}w_i+v_{i+1}w_{x,i}=$$
$$=v_{x,i}w_i+v_iw_{x,i}+h_{i+1}v_{x,i}w_{x,i}. \qquad (7)$$

Sobre la base de estas fórmulas se deducen fácilmente las fórmulas de suma por partes. Multiplicando, por ejemplo, la fórmula (6) por h_i y sumando la correlación obtenida con respecto a i desde $m+1$ hasta n $(0 \leqslant m < n \leqslant N)$, hallamos que

$$\sum_{i=m+1}^{n}(vw)_{\bar{x},i}h_i=\sum_{i=m+1}^{n}v_{\bar{x},i}w_{i-1}h_i+\sum_{i=m+1}^{n}v_iw_{\bar{x},i}h_i.$$

Efectuando la suma en el primer miembro y haciendo la sustitución del índice de suma $i-1=i'$ en la primera suma del segundo miembro, después de cierta reagrupación resultará la siguiente fórmula:

$$\sum_{i=m+1}^{n}v_iw_{\bar{x},i}h_i=-\sum_{i=m}^{n-1}v_{x,i}w_ih_{i+1}+v_nw_n-v_mw_m \qquad (8)$$

(*que es la fórmula de suma por partes*). El primer sumando de la suma que figura en el segundo miembro de (8) es igual a

$$v_{x,m}w_mh_{m+1}=v_{m+1}w_m-v_mw_m.$$

Por eso la fórmula (8) puede transformarse en

$$\sum_{i=m+1}^{n-1}v_{x,i}w_ih_{i+1}=-\sum_{i=m+1}^{n}v_iw_{\bar{x},i}h_i+v_nw_n-v_{m+1}w_m. \qquad (9)$$

A base de la fórmula (9), teniendo en cuenta que

$$v_{x,i}h_{i+1}=v_{\hat{x},i}\hbar_i,$$

resulta la siguiente fórmula:

$$\sum_{i=m+1}^{n-1}v_{\hat{x},i}w_i\hbar_i=\sum_{i=m+1}^{n}v_iw_{\bar{x},i}h_i+v_nw_n-v_{m+1}w_m. \qquad (10)$$

Si en la correlación (10) se hace $v_i=a_iu_{\bar{x},i}$, $w_i=v_i$, tendremos la fórmula

$$\sum_{i=m+1}^{n-1}(au_{\bar{x}})_{\hat{x},i}v_i\hbar_i=$$
$$=-\sum_{i=m+1}^{n}a_iu_{\bar{x},i}v_{\bar{x},i}h_i+a_nu_{\bar{x},n}v_n-a_{m+1}u_{x,m}v_m, \qquad (11)$$

La fórmula (11), para $m = 0$ y $n = N$, se denomina *primera fórmula en diferencias de Green* y puede escribirse así:

$$((au_{\bar{x}})_{\hat{x}},\ v)_\omega = -(au_{\bar{x}},\ v_{\bar{x}})_{\omega^+} + a_N u_{\bar{x},N} v_N - a_1 u_{x,0} v_0, \tag{12}$$

Restando de la fórmula (12) la correlación

$$((av_{\bar{x}})_{\hat{x}},\ u)_\omega = -(av_{\bar{x}},\ u_{\bar{x}})_{\omega^+} + a_N v_{\bar{x},N} u_N - a_1 v_{x,0} u_0,$$

nos resulta que

$$((au_{\bar{x}})_{\hat{x}},\ v)_\omega - ((av_{\bar{x}})_{\hat{x}},\ u)_\omega = a_N (u_{\bar{x}} v - u v_{\bar{x}})_N - a_1 (u_x v - u v_x)_0 \tag{13}$$

(*ésta es la segunda fórmula en diferencias* de *Green*).

Correlaciones análogas a la primera y segunda fórmulas de Green (12) y (13) tienen lugar también para el operador en diferencias de cuarto orden $(bu_{\bar{x}x})_{\bar{x}x}$. Establezcamos, por ejemplo, la análoga de la primera fórmula de Green (12) en la suposición de que la red $\bar{\omega}$ es uniforme. A base de la fórmula (11), cuando $m = 1$, $n = N - 1$, $a \equiv 1$, $u \equiv w$, empleando los razonamientos que utilizábamos para demostrar la fórmula (13), deducimos la identidad

$$(w_{\bar{x}x},\ v)_{\overset{\circ}{\omega}} - (w,\ v_{\bar{x}x})_{\overset{\circ}{\omega}} = (w_{\bar{x}} v - w v_{\bar{x}})_{N-1} - (w_x v - w v_x)_1.$$

Restemos del primero y del segundo miembros de esta identidad la magnitud $h\,(w_1 v_{\bar{x}x,\,1} + w_{N-1} v_{\bar{x}x,\,N-1})$ y observemos que

$$(v_x - hv_{\bar{x}x})_1 = v_{\bar{x},\,1} = v_{x,\,0},$$

$$(-v_{\bar{x}} - hv_{\bar{x}x})_{N-1} = -v_{x,\,N-1} = -v_{\bar{x},\,N}.$$

Como resultado tenemos

$$(w_{\bar{x}x},\ v)_{\overset{\circ}{\omega}} - (w,\ v_{\bar{x}x})_\omega =$$
$$= (w_{\bar{x},\,N-1} v_{N-1} - w_{N-1} v_{\bar{x},\,N}) - (w_{x,\,1} v_1 - w_1 v_{x,\,0}).$$

Suponiendo que $w \equiv bu_{xx}$, obtendremos la *primera fórmula en diferencias de Green para el operador de cuarto orden*

$$((bu_{\bar{x}x})_{\bar{x}x},\ v)_{\overset{\circ}{\omega}} = (bu_{\bar{x}x},\ v_{\bar{x}x})_\omega + [(bu_{\bar{x}x})_{\bar{x}}\, v - bu_{\bar{x}x} v_x]_{N-1} -$$
$$- [(bu_{\bar{x}x})_x\, v - bu_{\bar{x}x} v_{\bar{x}}]_1. \tag{14}$$

3. Algunas desigualdades. A continuación emplearemos con frecuencia algunas desigualdades algebraicas bien conocidas.

1. *La desigualdad de Cauchy*:

$$\Big|\sum_{i,\,j=0}^{n} \alpha_{ij} a_i b_j\Big| \leqslant \Big(\sum_{i,\,j=0}^{n} \alpha_{ij} a_i a_j\Big)^{1/2} \Big(\sum_{i,\,j=0}^{n} \alpha_{ij} b_i b_j\Big)^{1/2}, \tag{15}$$

donde $\alpha_{ij} \geqslant 0$, siendo $i,\ j = 0,\ 1,\ \ldots,\ n$.

2) La *desigualdad* ε:

$$|ab| \leqslant \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon} b^2, \tag{16}$$

donde ε es cualquier número positivo.

La desigualdad general de Cauchy (15) en casos concretos alquiere una forma especial. Así, por ejemplo, si $n = N$, $\alpha_{ij} = 0$ cuando $i \neq j$, $\alpha_{ii} = \hbar_i$, siendo $i = 1, 2, \ldots, N-1$, $\alpha_{00} = h_1/2$, $\alpha_{NN} = h_N/2$ y $a_i = u(x_i)$, $b_i = v(x_i)$, entonces, la desigualdad (15) puede escribirse del siguiente modo:

$$|(u, v)_{\overline{\omega}}| \leqslant (u, u)_{\overline{\omega}}^{1/2} (v, v)_{\overline{\omega}}^{1/2}.$$

La magnitud $(v, v)_{\overline{\omega}}^{1/2}$ es una análoga de red de la norma en L_2. Tomando en consideración esta circunstancia, introduzcamos la siguiente notación:

$$\|v\|_{L_2(\overline{\omega})} = (v, v)_{\overline{\omega}}^{1/2},$$

en tal caso la desigualdad anterior se escribirá en la forma

$$|(u, v)_{\overline{\omega}}| \leqslant \|u\|_0 \|v\|_0,$$

donde $\|v\|_0 = \|v\|_{L_2(\overline{\omega})}$.

§ 2. Modelos unidimensionales

El material de este párrafo, en lo fundamental, tiene el carácter metódico. Aquí se estudian los problemas de contorno que se plantean para las ecuaciones corrientes en diferencias de segundo y cuarto ordenes, y en estos ejemplos elementales se ilustra la metodología de investigación de los problemas de red.

La investigación de un problema de red consta de tres etapas: 1) el esclarecimiento de la cuestión de la solubilidad del problema, 2) la investigación de la estabilidad del problema con respecto al segundo miembro y a las condiciones de frontera de éste, 3) la investigación de la velocidad de convergencia de la resolución del problema de red a la solución del problema que se aproxima. El objeto fundamental de la segunda etapa consiste en la obtención de la acotación apriorística de la solución. Con auxilio de la acotación apriorística puede, de una parte esclarecerse la cuestión sobre la solubilidad del problema y, de otra, obtenerse la acotación de la velocidad de convergencia del problema de red.

1. Primer problema de contorno para una ecuación unidimensional de segundo orden. En la red $\overline{\omega} = \{\overline{x} = \overline{x}_i \mid i = 0, 1, \ldots, N: x_0 = 0, x_N = l\}$ examinemos el siguiente problema:

$$\Lambda y \equiv -(a y_{\overline{x}})_{\hat{x}} = \varphi, \quad x \in \omega, \quad y(0) = u_0, \quad y(l) = u_1. \tag{1}$$

Supongamos que los coeficientes $a(x)$ del problema (1) satisfacen la condición

$$a(x) \geqslant c_0 > 0, \quad x \in \omega^+. \tag{2}$$

Investiguemos la cuestión acerca de la solubilidad del problema planteado. Estudiemos un problema homogéneo ($\varphi \equiv 0$, $u_0 = u_1 = 0$), cuya solución existe notoriamente. Sea $y(x)$ una de las soluciones del problema homogéneo. Multipliquemos la ecuación (1) por $y\hbar$ y sumemos según la red ω. Al transformar la expresión obtenida empleando la primera fórmula en diferencias de Green (12) del § 1, tendremos

$$(\Lambda y, y)_\omega = [y, y] = 0, \tag{3}$$

donde

$$[v, v] \equiv (av_{\bar{x}}, v_{\bar{x}})_{\omega^+}. \tag{4}$$

A base de la correlación (4), teniendo en cuenta la desigualdad (2) hallamos que $[v, v] \geqslant c_0 (v_{\bar{x}}\, v_{\bar{x}})_{\omega^+} \geqslant 0$. Pero $(v_{\bar{x}}, v_{\bar{x}})_{\omega^+} = 0$ sólo cuando $v(x) = \text{const}$ y $x \in \bar{\omega}$, por esta razón de la fórmula (3) se deduce que la solución única del problema homogéneo es una constante la cual, en virtud de las condiciones de frontera, es igual a cero. Por lo tanto la solución del problema (1), (2), cualesquiera que sean $\varphi(x)$, u_0 y u_1, existe y es única.

Hallemos la acotación apriorística de la solución del problema (1). Analicemos primero un problema que tiene las condiciones de frontera homogéneas

$$y(0) = y(l) = 0. \tag{5}$$

Sea $\overset{\circ}{V}$ un conjunto de funciones de red prefijadas en la red $\bar{\omega}$ y reducibles a cero cuando $x = 0, l$. Para las funciones de este conjunto aceptemos dos normas:

$$\| v \|_1^2 = (v_{\bar{x}}, v_{\bar{x}})_{\omega^+}, \tag{6}$$

la cual convierte el conjunto $\overset{\circ}{V}$ en espacio normalizado designado a través de $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\bar{\omega})$, y

$$\| \varphi \|_{-1} = \sup_{0 \neq v \in \overset{\circ}{V}} \frac{|(\varphi, v)_\omega|}{\| v \|_1}, \tag{7}$$

la cual lo convierte en un espacio normalizado $W_2^{-1}(\omega)$. Multipliquemos la ecuación (1) por $y\hbar$, sumemos según la red ω y, teniendo en cuenta las condiciones de frontera (5), transformemos la expresión obtenida, empleando la primera fórmula en diferencias de Green (12) del § 1.

Nos resulta que

$$(ay_{\bar{x}}, y_{\bar{x}})_{\omega^+} = (\varphi, y)_\omega.$$

Tomando en consideración la desigualdad (2) y atendiendo las correlaciones (6), (7), de aquí hallamos que

$$c_0 \| y \|_{\mathring{1}}^2 \leqslant |(\varphi, y)_\omega| \leqslant \| y \|_{\mathring{1}} \| \varphi \|_{-1} \tag{8}$$

ó

$$\| y \|_{\mathring{1}} \leqslant \frac{1}{c_0} \| \varphi \|_{-1}. \tag{9}$$

Hemos obtenido la acotación apriorística de la solución del problema (1), (5).

Volvamos al problema (1) con condiciones de frontera heterogéneas. Presentemos la solución de este problema en la forma

$$y(x) = \bar{y}(x) + \mathring{y}(x), \qquad x \in \bar{\omega}, \tag{10}$$

donde

$$\bar{y}_{\bar{x}\hat{x}} = 0, \quad x \in \omega, \quad \bar{y}(0) = u_0, \quad \bar{y}(l) = u_1, \tag{11}$$

y

$$\Lambda_{\mathring{y}} = \varphi - \Lambda_{\bar{y}}, \quad x \in \omega, \quad \mathring{y}(0) = \mathring{y}(l) = 0. \tag{12}$$

Acotemos la solución de los problemas (11) y (12). Aceptando la condición (2), hagamos, además, la suposición de que

$$a(x) \leqslant c_1, \qquad x \in \omega^+ . \tag{13}$$

Para acotar la solución del problema (12) valgámonos de la correlación (8), en virtud de la cual

$$c_0 \| \mathring{y} \|_{\mathring{1}}^2 \leqslant \| \varphi \|_{-1} \| \mathring{y} \|_{\mathring{1}} + |(\Lambda y, \mathring{y})_\omega|. \tag{14}$$

Haciendo uso de la primera fórmula en diferencias de Green (12) del § 1, hallamos que

$$|(\Lambda \bar{y}, \mathring{y})_\omega| = |(a\bar{y}_{\bar{x}}, \mathring{y}_{\bar{x}})_{\omega^+}| \equiv |[\bar{y}, \mathring{y}]|,$$

y, empleando la condición (13) y la desigualdad de Cauchy (15) del § 1, tendremos la acotación

$$|(\Lambda \bar{y}, \mathring{y})_\omega| \leqslant c_1 \| \bar{y} \|_{\mathring{1}} \| \mathring{y} \|_{\mathring{1}} .$$

Poniendo esta acotación en (14), obtendremos

$$c_0 \| \mathring{y} \|_{\mathring{1}}^2 \leqslant \| \varphi \|_{-1} \quad \| \mathring{y} \|_{\mathring{1}} + c_1 \| \bar{y} \|_{\mathring{1}} \| \mathring{y} \|_{\mathring{1}} ,$$

de donde

$$\| \mathring{y} \|_{\mathring{1}} \leqslant \frac{1}{c_0} \| \varphi \|_{-1} + \frac{c_1}{c_0} \| \bar{y} \|_{\mathring{1}} . \tag{15}$$

Hallemos ahora $\bar{y}(x)$. De (11) se desprende que

$$\bar{y}(x) = \frac{u_1 - u_0}{l} x + u_0 \tag{16}$$

y por lo tanto

$$\|\bar{y}\|_1^\circ = \frac{1}{\sqrt{l}} |u_1 - u_0|.$$

Poniendo esta correlación en (15), obtendremos la acotación de la función $\mathring{y}(x)$

$$\|\mathring{y}\|_1^\circ \leqslant \frac{1}{c_0} \|\varphi\|_{-1} + \frac{c_1}{c_0\sqrt{l}} |u_1 - u_0|. \qquad (17)$$

Acotemos $\bar{y}$. La función $\bar{y}(x)$ no pertenece al conjunto $\overset{\bullet}{V}$, es decir, no se anula cuando $x = 0, l$. Por eso la magnitud $(y_{\bar{x}}, y_{\bar{x}})_{\omega^+}$ no puede servir de norma para esta función, puesto que $(v_{\bar{x}}, v_{\bar{x}})_{\omega^+} = 0$, siendo $v(x) = \text{const} \neq 0$, $x \in \bar{\omega}$. En relación con esto introduzcamos una nueva norma

$$\|v\|_1^2 = (v_{\bar{x}}, v_{\bar{x}})_{\omega^+} + (v, v)_{\bar{\omega}} \qquad (18)$$

y acotemos $\bar{y}$ en esta norma. De la correlación (16) se deduce que

$$(\bar{y}_{\bar{x}}, \bar{y}_{\bar{x}})_{\omega^+} = \frac{|u_1 - u_0|^2}{l}, \qquad (\bar{y}, \bar{y})_{\bar{\omega}} \leqslant l \max_{x \in \bar{\omega}} |\bar{y}|^2 \leqslant l(|u_0| + |u_1|)^2,$$

y por lo tanto

$$\|\bar{y}\|_1 \leqslant \sqrt{l + 1/l}\,(|u_0| + |u_1|). \qquad (19)$$

Regresemos a la acotación de la solución del problema (1). De la correlación (10) se desprende la desigualdad

$$\|y\|_1 \leqslant \|\bar{y}\|_1 + \|\mathring{y}\|_1. \qquad (20)$$

El primer sumando del segundo miembro $\|\bar{y}\|_1$ se acota mediante la desigualdad (19), pero para la función $\mathring{y}$ tenemos la acotación sólo en la norma $\mathring{W}_2^1$. No obstante de las normas (6) y (18) se desprende que

$$\|v\|_1^2 = \|v\|_1^{\circ 2} + (v, v)_{\bar{\omega}},$$

y, por consiguiente, es suficiente acotar $(\overset{\bullet}{y}, \overset{\bullet}{y})_{\bar{\omega}} \equiv \|\overset{\bullet}{y}\|_0^2$. En el § 5 del presente capítulo (lema 2) se va a mostrar que para las funciones del conjunto $\overset{\bullet}{V}$ se verifica la desigualdad *)

$$\|v\|_1^{\circ 2} \geqslant \frac{8}{l^2} \|v\|_0^2.$$

*) Como ya se señaló, el material expuesto aquí tiene el carácter metódico. Uno de los fines que perseguimos consiste en aclarar qué desigualdades especiales se requieren para investigar los esquemas en diferencias. Esta nota y las posteriores están relacionadas precisamente con las desigualdades cuyas demostraciones aducimos en los §§ 4, 5.

Por lo tanto

$$\|v\|_{\mathring{1}}^{2} \geqslant \frac{1}{(1+l^2/8)} \|v\|_{1}^{2}. \tag{21}$$

Atendiendo esta acotación, a base de la desigualdad (17) hallamos que

$$\|\mathring{y}\|_1 \leqslant \frac{\sqrt{1+l^2/8}}{c_0} \|\varphi\|_{-1} + \frac{c_1}{c_0} \frac{\sqrt{1+l^2/8}}{l^{1/2}} (|u_0| + |u_1|).$$

Empleando esta desigualdad y la desigualdad (19) al acotar el segundo miembro de la correlación (20), en definitia obtendremos

$$\|y\|_1 \leqslant M_1 \|\varphi\|_{-1} + M_2 (|u_0| + |u_1|), \tag{22}$$

donde

$$M_1 = \frac{\sqrt{1+l^2/8}}{c_0}, \quad M_2 = \frac{c_1}{c_0} \frac{\sqrt{1+l^2/8}}{l^{1/2}} + \sqrt{l+1/l}.$$

Hemos obtenido la acotación apriorística de la solución del problema (1). Señalemos que las constantes M_1 y M_2, que figuran en esta actación, no dependen de la red $\bar{\omega}$, así que de (22) se sigue la estabilidad de la solución del problema (1) con respecto al segundo miembro y a las condiciones de frontera.

Hagamos uso de la acotación apriorística obtenida para investigar la velocidad de convergencia de un esquema en diferencias. Consideremos en el segmento $[0, l]$ el siguiente problema:

$$(ku')' = -f, \; 0 < x < l, \quad u(0) = u_0, \quad u(l) = u_1 \tag{23}$$

y, en concordancia con el § 2 del cap. II, aproximémoslo sobre una red no uniforme arbitraria $\bar{\omega}$ mediante el problema (1), suponiendo, por ejemplo, que

$$a(x_i) = k(x_i - h_i/2), \quad \varphi(x_i) = f(x_i). \tag{24}$$

Para la función $z(x) = y(x) - u(x)$, siendo $x \in \bar{\omega}$, obtenemos el problema

$$\Lambda z = \psi, \; x \in \omega, \quad z(0) = z(l) = 0, \tag{25}$$

donde $\psi(x) = \Lambda u + f$ es el error de aproximación. Acotemos la solución del problema (25). Teniendo presente la desigualdad (9), hallamos que

$$\|z\|_{\mathring{1}} \leqslant \frac{1}{c_0} \|\psi\|_{-1}. \tag{26}$$

Es fácil comprobar (véanse, por ejemplo, las fórmulas (6) — (8) del § 2 del cap. IV) que para el error de aproximación $\psi(x)$ tiene

lugar la siguiente representación:

$$\psi(x)=\eta_{\hat{x}}+\overset{*}{\psi},\quad \eta(x)=O(h^2),\quad \overset{*}{\psi}(x)=O(\hbar^2). \tag{27}$$

Teniendo en cuenta que $\|\psi\|_{-1}$ se determina mediante la correlación (7), acotemos $(\psi, v)_\omega$, siendo $v \in \overset{\circ}{V}$. Tomando en consideración la representación (27) y teniendo presente que $\eta_{\hat{x},i}=\frac{h_{i+1}}{\hbar_i}\eta_{x,i}$, tendremos

$$(\psi, v)_\omega=(\eta_{\hat{x}}, v)_\omega+(\overset{*}{\psi}, v)_\omega=\sum_{i=1}^{N-1}\eta_{x,i}v_ih_{i+1}+(\overset{*}{\psi}, v)_\omega.$$

Transformando el primer sumando del segundo miembro con auxilio de la fórmula para sumar por partes (9) § 1, hallamos que

$$(\psi, v)_\omega=-(\eta, v_{\bar{x}})_{\omega^+}+(\overset{*}{\psi}, v)_\omega.$$

Empleando la desigualdad de Cauchy (15) del § 1 para acotar el segundo miembro, obtendremos

$$|(\psi, v)_\omega|\leqslant(\eta^2, 1)_{\omega^+}^{1/2}\|v\|_1+\|\overset{*}{\psi}\|_0\|v\|_0\leqslant\{(\eta^2, 1)_{\omega^+}+\|\overset{*}{\psi}\|_0^2\}^{1/2}\|v\|_1.$$

Pongamos esta acotación en la definición (7) y tengamos en cuenta la desigualdad (21). Como resultado tendremos la desigualdad

$$\|\psi\|_{-1}\leqslant\{(\eta^2, 1)_{\omega^+}+\|\overset{*}{\psi}\|_0^2\}^{1/2}\sup\frac{\|v\|_1}{\|v\|_1^{\circ}}\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{1+l^2/8}\,\{(\eta^2, 1)_{\omega^+}+\|\overset{*}{\psi}\|_0^2\}^{1/2}.$$

A base de ésta y de la (26), teniendo presente la representación (27), hallamos que

$$\|z\|_{\overset{1}{0}}=O(|h|^2),\qquad |h|=\text{máx}\,h(x).$$

De esta manera, la solución del problema en diferencias (1), (24), siendo cumplida la condición (2), converge a una solución del problema (23) suficientemente lisa con la velocidad $O(|h|^2)$.

2. Tercer problema de contorno para una ecuación unidimensional de segundo orden. En una red uniforme $\bar{\omega}$ situada en el segmento $[0, l]$ consideremos el siguiente problema:

$$\begin{gathered}\Lambda y\equiv-(ay_{\bar{x}})_x+dy=\varphi(x),\quad x\in\omega,\\ -a_1y_{x,0}+\left(\varkappa_0+\frac{h}{2}d_0\right)y_0=g_0+\frac{h}{2}\varphi_0,\\ a_Ny_{\bar{x},N}+\left(\varkappa_1+\frac{h}{2}d_N\right)y_N=g_1+\frac{h}{2}\varphi_N.\end{gathered} \tag{28}$$

Supongamos que el coeficiente $a(x)$ satisface la condición (2) y los coeficientes $d(x)$, $\varkappa_0$ y $\varkappa_1$ satisfacen las condiciones

$$d(x) \geqslant 0, \quad x \in \overline{\omega}, \quad \varkappa_0 \geqslant 0, \quad \varkappa_1 \geqslant 0, \tag{29}$$

$$\varkappa_0 + \varkappa_1 + (d, l)_{\overline{\omega}} > 0. \tag{30}$$

Introduzcamos un operador $\overline{\Lambda}$ definible por la fórmula

$$\overline{\Lambda} v(x) = \begin{cases} -\frac{2}{h} a_1 v_x + \left(\frac{2}{h}\varkappa_0 + d_0\right) v, & x = 0, \\ -(a v_{\bar{x}})_x + dv, & x \in \omega, \\ \frac{2}{h} a_N v_{\bar{x}} + \left(\frac{2}{h}\varkappa_1 + d_N\right), & x = l, \end{cases} \tag{31}$$

y reescribamos el problema (28) en la siguiente forma:

$$\overline{\Lambda} v = \Phi, \quad x \in \overline{\omega}, \tag{32}$$

donde

$$\Phi = \begin{cases} \varphi_0 + \frac{2}{h} g_0, & x = 0, \\ \varphi(x), & x \in \omega, \\ \varphi_N + \frac{2}{h} g_1, & x = l. \end{cases} \tag{33}$$

Estudiemos la cuestión sobre la solubilidad del problema (32). Investiguemos el producto escalar $(\overline{\Lambda} v, v)_{\overline{\omega}}$. Empleando la fórmula de Green (12) del § 1, hallamos que

$$(\overline{\Lambda} v, v)_{\overline{\omega}} = (a v_{\bar{x}}, v_{\bar{x}})_{\omega^+} + (dv, v)_{\overline{\omega}} + \varkappa_0 v_0^2 + \varkappa_1 v_N^2 \equiv [v, v]. \tag{34}$$

Teniendo en cuenta las condiciones (2) y (29) de aquí deducimos que

$$[v, v] \geqslant 0,$$

además, si $[v, v] = 0$, entonces, $v \equiv \text{const}$, $x \in \overline{\omega}$. Como aunque una de las magnitudes $\varkappa_0$, $\varkappa_1$, $d(\overset{\circ}{x})$, donde $\overset{\circ}{x}$ es un nodo determinado de la red $\overline{\omega}$, es mayor que cero, la igualdad $[v, v] = 0$ conduce a la igualdad a cero o de $v(0)$, o de $v(l)$, o de $v(\overset{\circ}{x})$, es decir, $v \equiv 0$.

Supongamos ahora que en la ecuación (32) $\Phi \equiv 0$, $x \in \omega$ y consideremos el problema homogéneo obtenido. Su solución $y(x)$ en virtud de la identidad (34) satisface la condición $[y, y] = 0$, lo que debido a lo que acabamos de demostrar lleva tras sí la afirmación de que $y(x) \equiv 0$, $x \in \overline{\omega}$. De esta forma, al cumplirse las condiciones (2), (29) y (30) el problema homogéneo (32) tiene sólo una solución trivial y, por consiguiente, dicho problema bajo estas condiciones es soluble unívocamente para cualquier función $\Phi(x)$. Para obtener la acotación apriorística de la solución del problema (32) supongamos que en (34) $v \equiv y$ y tengamos en cuenta la ecuación (32)

y la fórmula (33). Nos resulta

$$[y,\ y] = (\varphi,\ y)_{\bar\omega} + g_0 y(0) + g_1 y(l). \qquad (35)$$

Acotemos la solución $y(x)$ en la norma del espacio $W_2^1(\bar\omega)$ (véase (18)). Supongamos que los coeficientes $d(x)$, $\varkappa_0$ y $\varkappa_1$ del problema (32) son tales que tiene lugar la desigualdad

$$[v,\ v] \geqslant m\,\|v\|_1^2, \qquad (36)$$

donde m es una constante positiva independiente de la red $\bar\omega$ y de la función $v(x)$. Tomando en consideración (34), es fácil comprobar que la desigualdad (36) tendrá lugar, si, aparte de las condiciones (2) y (29), se verifica la condición complementaria

$$d(x) \geqslant c_3 > 0, \qquad x \in \bar\omega.$$

Otras condiciones suficientes que aseguran la validez de la desigualdad (36) se van a establecer en el § 5 del presente capítulo.

De esta manera, de la identidad (35) y de la desigualdad (36) se desprende que

$$\|y\|_1^2 \leqslant \frac{1}{m}\{|(\varphi,\ y)_{\bar\omega}| + |g_0 y(0)| + |g_1 y(l)|\}.$$

Sea que

$$\|\varphi\|_{-1}^{*} = \sup_{v\neq 0}\frac{|(\varphi,\ v)_{\bar\omega}|}{\|v\|_1}. \qquad (37)$$

Entonces,

$$\|y\|_1^2 \leqslant \frac{1}{m}\{\|\varphi\|_{-1}^{*}\|y\|_1 + |g_0|\,|y(0)| + |g_1|\,|y(l)|\}.$$

Para obtener de aquí una acotación apriorística, hay que saber acotar $|y(0)|$ e $|y(l)|$ a través de $\|y\|_1$. En el párrafo 4 (véase el teorema 2) se va a demostrar que

$$\|v\|_C \equiv \max_{x\in\bar\omega}|v(x)| \leqslant M\,\|v\|_1, \qquad (38)$$

donde $M = \text{const} > 0$ no depende de la red $\bar\omega$ ni de $v(x)$. Poniendo esta desigualdad en la anterior, obtendremos la acotación apriorística

$$\|y\|_1 \leqslant \frac{1}{m}\{\|\varphi\|_{-1}^{*} + M(|g_0| + |g_1|)\}. \qquad (39)$$

De esta acotación se desprende la estabilidad de la resolución del problema (30) con respecto al segundo miembro y las condiciones de frontera.

Hagamos uso de la acotación apriorística (39) para investigar la convergencia de un esquema en diferencias. Sobre el segmento $[0,\ l]$ consideremos el problema

$$(ku')' - qu = -f(x), \qquad 0 < x < l, \qquad (40)$$

$$k(0)\,u'(0) = \varkappa_0 u(0) - g_0, \quad -k(l)\,u'(l) = \varkappa_1 u(l) - g_1$$

y, de acuerdo con el § 2 del cap. II, aproximémoslo en la red uniforme $\bar{\omega}$ mediante el problema (28), suponiendo que

$$a(x_i) = k(x_i - h/2), \quad d(x_i) = q(x_i), \quad \varphi(x_i) = f(x_i). \qquad (41)$$

La función $z(x) = y(x) - u(x)$, siendo $x \in \bar{\omega}$, donde $y(x)$ es la solución del problema (28), (41) y $u(x)$ es la solución del problema (40), es a su vez la solución del siguiente problema:

$$\begin{gathered} \Lambda z = \psi(x), \quad x \in \omega, \\ -a_1 z_{x,0} + \left(\varkappa_0 + \frac{h}{2} d_0\right) z_0 = \psi_0, \\ a_N z_{\bar{x},N} + \left(\varkappa_1 + \frac{h}{2} d_N\right) z_N = \psi_N. \end{gathered} \qquad (42)$$

En el § 3 del cap II fue mostrado que, siendo suficientemente lisa la solución del problema (40), los errores de aproximación de la ecuación y de las condiciones de frontera eran las magnitudes $O(h^2)$, es decir,

$$\psi(x) = O(h^2), \quad x \in \omega, \quad \psi_0 = O(h^2), \quad \psi_N = O(h^2). \qquad (43)$$

Para la solución del problema (42), en virtud de la desigualdad (39), es válida la acotación

$$\| z \|_1 \leqslant \frac{1}{m} \{ \| \psi \|_{-1} + M(|\psi_0| + |\psi_N|) \}.$$

Dado que (véase la fórmula (37)) $\| \psi_1^* \|_{-1} \leqslant \| \psi \|_0 \leqslant \sqrt{l}\, \| \psi \|_C$ a base de la acotación antes citada y las correlaciones (43) resulta que $\| z \|_1 = O(h^2)$. De esta manera, la resolución del problema (28), al cumplirse las condiciones (36), converge a la resolución del problema (40) con la velocidad $O(h^2)$.

3. Segundo problema de contorno para una ecuación unidimensional de segundo orden. Supongamos que en el problema (28) $d(x) \equiv 0$, $\varkappa_0 = \varkappa_1 = 0$. Con estos supuestos el problema (28) toma la forma

$$\begin{gathered} -(a y_{\bar{x}})_x = \varphi, \quad x \in \omega, \\ -a_1 y_{x,0} = g_0 + \frac{h}{2} \varphi_0, \quad a_N y_{\bar{x},N} = g_1 + \frac{h}{2} \varphi_N. \end{gathered} \qquad (44)$$

Señalemos que las suposiciones hechas están en contradicción con la condición (30), la cual desempeñaba un papel determinante al investigar la solubilidad del problema (28). No ofrece dificultad comprobar que el problema homogéneo (44) tiene la solución no trivial $y(x) = \text{const}$ y, por consiguiente, el problema (43) es degenerado y por lo tanto no puede tener solución para los segundos miembros $\varphi(x)$ y g_0, g_1 cualesquiera que sean. Como $[v, v] = (av_{\bar{x}},$

$v_{\bar{x}})_{\omega+} = 0$ sólo cuando $y(x) \equiv \text{const}$, entonces, en virtud de la identidad (34) $y(x) \equiv \text{const}$ es la solución única del problema (44).

Introduzcamos el operador $\mathring{\bar{\Lambda}}$, definible por la siguiente fórmula (compárese con la fórmula (31)):

$$\mathring{\bar{\Lambda}} v(x) = \begin{cases} -\frac{2}{h} a_1 v_x, & x = 0, \\ -(a v_{\bar{x}})_x, & x \in \omega, \\ \frac{2}{h} a_N v_{\bar{x}}, & x = l. \end{cases}$$

De lo expuesto anteriormente se desprende que el cero es el valor propio de multiplicidad uno de este operador y, por consiguiente, el problema heterogéneo (44) será soluble, si para sus segundos miembros se impone una condición. Transformando el producto escalar $(\mathring{\bar{\Lambda}} y, 1)_{\bar{\omega}}$ con auxilio de la segunda fórmula en diferencias de Green (13) del § 1, hallaremos que $(\mathring{\bar{\Lambda}} y, 1)_{\bar{\omega}} = 0$. Pero, de otra parte,

$$(\mathring{\bar{\Lambda}} y, 1)_{\bar{\omega}} = (\varphi, 1)_{\bar{\omega}} + g_0 + g_1,$$

y, por consiguiente, debe cumplirse la condición

$$(\varphi, 1)_{\bar{\omega}} + g_0 + g_1 = 0. \tag{45}$$

De esta manera, al cumplirse la condición (45) el problema (44) es soluble. Hallemos la acotación apriorística de esta solución. Igual que al investigar el problema (28), nos resulta que

$$[y, y] \equiv (a y_{\bar{x}}, y_{\bar{x}})_{\omega+} = (\varphi, y)_{\bar{\omega}} + g_0 y(0) + g_1 y(l).$$

Tomando en consideración la condición (12), la definición (37) y la desigualdad (38), obtenemos

$$c_0 (y_{\bar{x}}, y_{\bar{x}})_{\omega+} \leqslant \|\varphi\|_{-1} \|y\|_1 + M(|g_0| + |g_1|) \|y\|_1. \tag{46}$$

En el § 5 de este capítulo se demostrará (lema 3) que

$$(v_{\bar{x}}, v_{\bar{x}})_{\omega+} \geqslant M_1 \|v\|_1^2 - M_2 (v, 1)_{\bar{\omega}}^2,$$

donde M_1 y M_2 son constantes positivas que no dependen de la red $\bar{\omega}$ ni de $v(x)$. Atendiéndolo, a base de la desigualdad (46) hallamos que

$$c_0 M_1 \|y\|_1^2 \leqslant \|\varphi\|_{-1} \|y\|_1 + M(|g_0| + |g_1|) \|y\|_1 + c_0 M_2 (y, 1)_{\bar{\omega}}^2.$$

Empleando ahora la desigualdad ε (16) del § 1 para la acotación de los productos $\|\varphi\|_{-1} \|y\|_1$, $|g_0| \, \|y\|_1$, $|g_1| \, \|y\|$, tenemos

la acotación

$$(c_0M_1 - \varepsilon - 2M\varepsilon)\|y\|_1^2 \leqslant \frac{1}{4\varepsilon}\|\varphi\|^2_{\overset{\circ}{-1}} + \\ + \frac{M}{4\varepsilon}(|g_0|^2 + |g_1|^2) + c_0M_2(y, 1)^2_{\overline{\omega}}.$$

Al escoger $\varepsilon > 0$, por ejemplo, partiendo de la condición $(c_0M_1 - \varepsilon - 2M\varepsilon) = c_0M_1/2$, obtendremos la siguiente acotación apriorística:

$$\|y\|_1^2 \leqslant M_3\{\|\varphi\|^2_{\overset{\circ}{-1}} + |g_0|^2 + |g_1|^2 + (y, 1)^2_{\overline{\omega}}\}. \tag{47}$$

El segundo miembro de la desigualdad (47) contiene, además de las magnitudes conocidas, el cuadrado del producto escalar de la solución buscada por la unidad. La presencia de este sumando está relacionada con la circunstancia de que la solución incógnita se halla no unívocamente, como en los problemas (1) y (28), sino salvo un sumando constante arbitrario.

Valgámonos de la acotación apriorística (47) para investigar la velocidad de convergencia de un esquema en diferencias. Sobre el segmento $[0, l]$ consideremos un problema

$$(ku')' = -f(x), \quad k(0)\,u'(0) = -g_0, \quad -k(l)\,u'(l) = -g_1. \tag{48}$$

Supongamos cumplida la condición de solubilidad

$$\int_0^l f(x)\,dx + g_0 + g_1 = 0. \tag{49}$$

La prefijación de la proyección de la solución buscada sobre la unidad

$$\int_0^l u(x)\,dx = Q \tag{50}$$

garantiza su unicidad. Sobre la red uniforme $\overline{\omega}$ aproximemos el problema (48), (49) mediante el problema (44), la cual tiene

$$a(x_i) = k\left(x_i - \frac{h}{2}\right), \quad \varphi(x_i) = f(x_i) - R/l, \\ R = (f, 1)_{\overline{\omega}} + g_0 + g_1, \tag{51}$$

mientras que la condición (50) se aproxima por la condición

$$(y, 1)_{\overline{\omega}} = Q. \tag{52}$$

La condición (45), en virtud de la fórmula (51), se cumple para el problema que se aproxima y que, por lo tanto, es resoluble.

Sometamos al examen la función $z(x) = y(x) - u(x)$, donde $y(x)$ es la solución del problema (44), (51), (52) en tanto que $u(x)$ es la solución del problema (48) — (50). Para la función $z(x)$ obtenemos el problema

$$-(az_{\bar{x}})_x = \psi(x), \quad x \in \omega, \quad -a_1 z_{x,0} = \psi(0), \quad a_N z_{\bar{x},N} = \psi(l),$$
$$(z, 1)_{\bar{\omega}} = Q - (u, 1)_{\bar{\omega}}. \tag{53}$$

Dado que los problemas (44), (51), (52) y (48) — (50) son resolubles, también es resoluble el problema (53). Teniendo en cuenta la acotación apriorística (47), para $z(x)$ tenemos

$$\| z \|_1^2 \leqslant M_3 \{\| \psi \|^2_{\overset{\circ}{-1}} + |\psi(0)|^2 + |\psi(l)|^2 + (z, 1)^2_{\bar{\omega}}\}. \tag{54}$$

Debido a lo demostrado anteriormente $\psi(x) = O(h^2)$ a la vez que en virtud de (53)

$$(z, 1)_{\bar{\omega}} = Q - (u, 1)_{\bar{\omega}} = \int_0^l u(x)\,dx - (u, 1)_{\bar{\omega}} = O(h^2).$$

Por esta razón, partiendo de (54), hallamos que $\| z \|_1 = O(h^2)$. Hemos demostrado la convergencia del esquema en diferencias (44), (51), (52).

4. Primer problema de contorno para una ecuación unidimensional de cuarto orden. Dirijámonos ahora a los esquemas en diferencias que aproximan los problemas de contorno para la ecuación diferencial corriente de cuarto orden. Dada sobre el segmento $0 \leqslant x \leqslant l$ una red uniforme $\bar{\omega}$ con el paso h. Sobre la red $\bar{\omega}$ consideremos el siguiente problema:

$$y_{\bar{x}x\bar{x}x} = \varphi(x), \qquad x \in \overset{\circ}{\omega}, \tag{55}$$

$$y(0) = w_0, \quad y_x - \frac{h}{2} y_{xx} + \frac{h^2}{2} y_{xxx}|_{x=0} = \frac{h^3}{2}\varphi(h) + w_0', \tag{56}$$

$$y_{\bar{x}} + \frac{h}{2} y_{\bar{x}\bar{x}} + \frac{h^2}{2} y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}|_{x=l} = -\frac{h^3}{3}\varphi(l-h) + w_1', \quad y(l) = w_1.$$

Como se mostró en el p. 4 del § 6 del cap. IV, el problema (55), (56) aproxima, con el error $O(h^2)$, al problema

$$\begin{aligned} &w^{\mathrm{IV}} = \varphi(x), \qquad 0 < x < l, \\ &w(0) = w_0, \ w'(0) = w_0', \ w(l) = w_1, \ w'(l) = w_1'. \end{aligned} \tag{57}$$

Investiguemos la cuestión de solubilidad del problema (55), (56) y hallemos la acotación apriorística de su solución. Multipliquemos la ecuación (55) por $y(x)\,h$ y sumemos la correlación obtenida según la red $\overset{\circ}{\omega}$:

$$(y_{\bar{x}x\bar{x}x}, y)_{\overset{\circ}{\omega}} = (\varphi, y)_{\overset{\circ}{\omega}}.$$

Transformando el primer miembro de acuerdo con la fórmula de Green (14) del § 1, tendremos

$$(y_{\bar{x}x}^2,\ 1)_\omega + [y_{\bar{x}x\bar{x}}y - y_{\bar{x}x}y_x]_{N-1} - [y_{\bar{x}xx}y - y_{\bar{x}x}y_{\bar{x}}]_1 = (\varphi,\ y)_{\overset{\circ}{\omega}}. \quad (58)$$

Para la transformación ulterior del primer miembro de la correlación obtenida hagamos uso de las condiciones de frontera (56). Como $y_1 = y_0 + hy_{x,0}$, $y_{N-1} = y_N - hy_{\bar{x},N}$, entonces,

$$[y_{\bar{x}xx}y - y_{\bar{x}x}y_{\bar{x}}]_1 = -y_{xxx}y|_{x=0} + y_x(y_{xx} - hy_{xxx})|_{x=0},$$

$$[y_{\bar{x}x\bar{x}}y - y_{\bar{x}x}y_{\bar{x}}]_{N-1} = y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}y|_{x=l} - y_{\bar{x}}(y_{\bar{x}\bar{x}} + hy_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}})|_{x=l}$$

y, teniendo en cuenta (56), hallamos que

$$-[y_{\bar{x}xx}y - y_{\bar{x}x}y_{\bar{x}}]_1 = -y_{xxx,0}w_0 + \frac{2}{h}y_{x,0}^2 - $$
$$- h\varphi(h)\,y(h) + h\varphi(h)\,w_0 - \frac{2}{h}w_0'y_{x,0},$$

$$[y_{\bar{x}x\bar{x}}y - y_{\bar{x}x}y_x]_{N-1} = y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x},N}w_1 + \frac{2}{h}y_{\bar{x},N}^2 -$$
$$- h\varphi(l-h)\,y(l-h) + h\varphi(l-h)\,w_1 - \frac{2}{h}y_{\bar{x},N}w_1'.$$

Poniendo estas correlaciones en (58), hallamos que

$$(y_{\bar{x}x}^2,\ 1)_\omega + \frac{2}{h}(y_{x,0}^2 + y_{\bar{x},N}^2) =$$

$$= (\varphi,\ y)_\omega + \frac{2}{h}(y_{x,0}w_0' + y_{\bar{x},N}w_1') - h[\varphi(h)\,w_0 - \varphi(l-h)\,w_1]. \quad (59)$$

Sea $y(x)$ una de las soluciones del problema (55), (56) homogéneo ($\varphi \equiv 0$, $w_0 = w_1 = w_0' = w_1' = 0$). Entonces, de (59) se desprende que $(y_{\bar{x}x}^2,\ 1)_\omega = 0$, $y_{x,0}^2 = 0$, $y_{\bar{x},N}^2 = 0$. Pero $(y_{\bar{x}x}^2,\ 1) = 0$ sólo cuando $y(x) = ax + b$, donde a y b son ciertas constantes. De las correlaciones $y_{x,0}^2 = 0$ e $y_{\bar{x},N}^2 = 0$ se deduce que $a = 0$, es decir, $y(x) = \text{const}$, $x \in \bar{\omega}$. Ya que según la suposición $y_0 = y_N = 0$, entonces $y(x) \equiv 0$, $x \in \bar{\omega}$. De esta forma, $y(x) \equiv 0$ es la solución única del problema homogéneo (55), (56), y, por lo tanto, la solución del problema (55), (56) existe y es única para cualesquier $\varphi(x)$, w_0, w_1, w_0' y w_1' que sean.

Hallemos la acotación apriorística de la solución del problema (55), (56). Representemos su solución en la forma $y(x) \equiv \bar{y}(x) + \overset{\circ}{y}(x)$, donde $\bar{y}(x)$ es la solución de una ecuación homogénea con las condiciones heterogéneas de frontera

$$\bar{y}_{\bar{x}x\bar{x}x} = 0,\ x \in \overset{\circ}{\omega},\ \bar{y}_0 = w_0,\ \bar{y}_0 = w_0',\ \bar{y}_{\bar{x},N} = w_1',\ \bar{y}_N = w_1. \quad (60)$$

e $\overset{\circ}{y}(x)$, la solución del siguiente problema:

$$\begin{gathered}\overset{\circ}{y}_{\bar{x}x\bar{x}x}=\varphi, \quad x\in\overset{\circ}{\omega}, \quad \overset{\circ}{y}_0=\overset{\circ}{y}_N=0,\\ \overset{\circ}{y}_x-\frac{h}{2}\overset{\circ}{y}_{xx}+\frac{h^2}{2}\overset{\circ}{y}_{xxx}|_{x=0}=\frac{h^3}{2}\varphi(h)+\frac{h}{2}(\bar{y}_{xx}-h\bar{y}_{xxx})|_{x=0},\\ \overset{\circ}{y}_{\bar{x}}+\frac{h}{2}y_{\bar{x}\bar{x}}+\frac{h^2}{2}\overset{\circ}{y}_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}|_{x=l}=\\ =-\frac{h^3}{2}\varphi(l-h)-\frac{h}{2}(\bar{y}_{\bar{x}\bar{x}}+hy_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}})|_{x=l}.\end{gathered} \tag{61}$$

Para las funciones de red preestablecidas en la red ω, introduzcamos la norma según la fórmula $\|v\|_2^2\equiv\|v\|^2_{W_2^2(\overline{\omega})}\equiv\|v_{\bar{x}x}\|_0^2+$ $+\|v\|_0^2$, donde $\|v_{\bar{x}x}\|_0^2\equiv\|v\|^2_{2,0}\equiv(v_{\bar{x}x}, v_{\bar{x}x})_{\omega}$.

Para solucionar el problema (61) a partir de la identidad (59) hallamos que

$$\begin{gathered}\|\overset{\circ}{y}\|^2_{2,0}+\frac{2}{h}(\overset{\circ}{y}{}^2_{x,0}+\overset{\circ}{y}{}^2_{\bar{x},N})=\\ =(\varphi, \overset{\circ}{y})_{\omega}+\overset{\circ}{y}_{x,0}(\bar{y}_{xx}-h\bar{y}_{xxx})_0-\overset{\circ}{y}_{\bar{x},N}(\bar{y}_{\bar{x}\bar{x}}+h\bar{y}_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}})_N.\end{gathered} \tag{62}$$

Acotemos el segundo miembro de esta correlación. Dado que

$$(\bar{y}_{xx}-h\bar{y}_{xxx})_0=2\bar{y}_{\bar{x}x}(h)-\bar{y}_{\bar{x}x}(2h),$$

entonces, aplicando dos veces la desigualdad ε (16) del § 1, tendremos

$$\begin{gathered}|\overset{\circ}{y}_{x,0}(\bar{y}_{xx}-h\bar{y}_{xxx})_0\leqslant 2|\overset{\circ}{y}_{x,0}\bar{y}_{\bar{x}x,1}|+|\overset{\circ}{y}_{x,0}y_{\bar{x}x,2}|\leqslant\\ \leqslant(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\overset{\circ}{y}{}^2_{x,0}+\frac{1}{4\varepsilon_1}4\bar{y}^2_{\bar{x}x}(h)+\frac{1}{4\varepsilon_2}\bar{y}^2_{\bar{x}x}(2h).\end{gathered}$$

Supongamos que $\varepsilon_1+\varepsilon_2=2/h$ e igualemos los coeficientes de $\bar{y}^2_{\bar{x}x}(h)$ e $\bar{y}^2_{\bar{x}x}(2h)$, es decir, hagamos que $1/\varepsilon_1=1/4\varepsilon_2$. Al resolver este sistema, hallamos que $\varepsilon_1=4\varepsilon_2=8/h$. Por lo tanto

$$|\overset{\circ}{y}_{x,0}(\bar{y}_{xx}-h\bar{y}_{xxx})_0|\leqslant\frac{2}{h}\overset{\circ}{y}{}^2_{x,0}+\frac{5}{8}h[\bar{y}^2_{\bar{x}x}(h)+\bar{y}^2_{\bar{x}x}(2h)].$$

Análogamente se establece la acotación

$$|\overset{\circ}{y}_{\bar{x},N}(\bar{y}_{\bar{x}\bar{x}}+h\bar{y}_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}})_N|\leqslant\frac{2}{h}\overset{\circ}{y}{}^2_{\bar{x},N}+\frac{5}{8}h[\bar{y}^2_{\bar{x}x}(l-h)+\bar{y}^2_{\bar{x}x}(l-2h)].$$

Sustituyendo en (62) las acotaciones obtenidas, hallamos que, cuando $h\leqslant l/5$ (es decir, siendo $2h\neq l-2h$)

$$\begin{gathered}\|\overset{\circ}{y}\|^2_{2,0}\leqslant|(\varphi, \overset{\circ}{y})_{\omega}|+\frac{5}{8}h[\bar{y}^2_{\bar{x}x}(h)+\bar{y}_{\bar{x}x}(2h)+\bar{y}^2_{\bar{x}x}(l-2h)+\\ +\bar{y}^2_{\bar{x}x}(l-h)]\leqslant|(\varphi, \overset{\circ}{y})_{\omega}|+\frac{5}{8}\|\bar{y}\|^2_{2,0}.\end{gathered} \tag{63}$$

Acotemos el primer sumando del segundo miembro empleando la desigualdad de Cauchy (15) y la desigualdad-epsilon (16) del § 1:

$$|(\varphi, \overset{\circ}{y})_\omega| \leqslant \varepsilon \|\overset{\circ}{y}\|_0^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|\varphi\|_0^2. \tag{64}$$

En el § 5 de este capítulo (lema 5) será demostrado que para las funciones de red prefijadas en la red $\overline{\omega}$ y que se reducen a cero cuando $x = 0$ y $x = l$, es justa la desigualdad

$$\|v_{\bar{x}x}\|_0^2 \geqslant M_6 \|v\|_0^2, \quad M_6 = \text{const} > 0. \tag{65}$$

Poniendo la acotación (65) en la desigualdad (64) y la última, a su vez, en la acotación (63), suponiendo, además, que $\varepsilon = (2M_6)^{-1}$, obtendremos:

$$\|\overset{\circ}{y}\|_{2,0}^2 \leqslant M_6 \|\varphi\|_0^2 + \frac{5}{4} \|\bar{y}\|_{2,0}^2. \tag{66}$$

Acotemos ahora la solución del problema (60). Efectuando los cálculos adecuados, hallamos que la solución del problema (60) tiene la forma

$$\bar{y}(x) = w_0 + \frac{w_1 - w_0}{l} x + \frac{w_0 - w_1 + lw_0' + h(w_1' - w_0')}{l(l-h)(l-2h)} x(l-x)^2 +$$
$$+ \frac{w_1 - w_0 - lw_1' + h(w_1' - w_0')}{l(l-h)(l-2h)} x^2(l-x), \quad x \in \overline{\omega}. \tag{67}$$

Acotando $\bar{y}_{\bar{x}x}(x)$, tendremos que

$$\|\bar{y}_{\bar{x}x}\|_{C(\omega)} \leqslant \frac{2}{l(l-h)} \{3(|w_0| + |w_1|) + 2l(|w_0'| + |w_1'|)\}$$

y por lo tanto, siendo $h \leqslant l/5$

$$\|\bar{y}\|_{2,0}^2 \leqslant \frac{5}{l^3} \{3(|w_0| + |w_1|) + 2l(|w_0'| + |w_1'|)\}^2. \tag{68}$$

Poniendo esta acotación en (66) y atendiendo la desigualdad (65), obtendremos la acotación de la función $\overset{\circ}{y}$ en la norma $W_2^2(\overline{\omega})$:

$$\|\overset{\circ}{y}\|_2^2 \leqslant (1 + M_6) \|\varphi\|_0^2 +$$
$$+ \frac{25}{4} \frac{1 + M_6}{M_6 l^3} \{3(|w_0| + |w_1|) + 2l(|w_0'| + |w_1'|)\}^2.$$

Acotemos en la norma $W_2^2(\overline{\omega})$ la función $\bar{y}(x)$. Partiendo de (67) hallamos que

$$\|\bar{y}\|_0^2 \leqslant l\{2(|w_0| + |w_1|) + l(|w_0'| + |w_1'|)\}^2.$$

Tomando en consideración esta desigualdad y la (68), obtenemos

$$\|\bar{y}\|_2^2 \leqslant \frac{5}{l^3} \{3(|w_0| + |w_1|) + 2l(|w_0'| + |w_1'|)\}^2 +$$
$$+ l\{2(|w_0| + |w_1|) + l(|w_0'| + |w_1'|)\}^2.$$

No nos queda más que acotar la función $y(x)$, la cual es igual a la suma de las funciones $\overset{\circ}{y}(x)$ e $\bar{y}(x)$. Como resultado obtenemos la acotación apriorística buscada:

$$\|y\|_2^2 \leqslant 2(\|\overset{\circ}{y}\|_2^2 + \|\bar{y}\|_2^2) \leqslant$$
$$\leqslant 2(1+M_8)\|\varphi\|_0^2 + l\{2(|w_0| + |w_1|) + l(|w_0'| + |w_1'|)\}^2 +$$
$$+ \frac{25+45M_8}{4M_8 l^3}\{3(|w_0| + |w_1|) + 2l(|w_0'| + |w_1'|)\}^2.$$

Hemos obtenido la acotación de la solución del problema (55), (56). De la acotación apriorística obtenida, teniendo en cuenta el error de aproximación (véase el p. 4 del § 6 del cap. IV) del problema (57) por el problema (55), (56), se deduce la convergencia de la solución del problema (55), (56) con la velocidad $O(h^2)$.

5. Modelo discreto de una barra elástica apoyada. Consideremos el siguiente problema de red:

$$y_{\bar{x}x\bar{x}x} = \varphi(x), \qquad x \in \overset{\circ}{\omega}, \tag{69}$$

$$\begin{gathered} y(0) = w_0, \qquad -y_{xx} + hy_{xxx}|_{x=0} = \mathscr{M}_0 + h^2\varphi(h), \\ y_{\bar{x}\bar{x}} + hy_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}|_{x=l} = \mathscr{M}_1 - h^2\varphi(l-h), \qquad y(l) = u_1, \end{gathered} \tag{70}$$

y hallemos para éste la acotación apriorística. Presentemos la solución de este problema en la forma $y(x) = \overset{\circ}{y}(x) + \bar{y}(x)$, $x \in \bar{\omega}$, donde $\bar{y}(x)$ es la solución del problema

$$\begin{gathered} \bar{y}_{\bar{x}x\bar{x}x} = 0, \qquad x \in \overset{\circ}{\omega}, \\ \bar{y}(0) = u_0, \; -\bar{y}_{xx} + h\bar{y}_{xxx}|_{x=0} = 0, \; \bar{y}_{\bar{x}\bar{x}} + h\bar{y}_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}|_{x=l} = 0, \\ \bar{y}(l) = u_1, \end{gathered} \tag{71}$$

en tanto que $\overset{\circ}{y}(x)$ se determina a base de las ecuaciones

$$\begin{gathered} y_{\bar{x}x\bar{x}x} = \varphi(x), \qquad x \in \overset{\circ}{\omega}, \\ \overset{\circ}{y}(0) = 0, \quad -\overset{\circ}{y}_{xx} + h\overset{\circ}{y}_{xxx}|_{x=0} = \mathscr{M}_0 = h^2\varphi(h), \\ -\overset{\circ}{y}_{\bar{x}\bar{x}} - h\overset{\circ}{y}_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}|_{x=l} = \mathscr{M}_1 + h^2\varphi(l-h), \quad \overset{\circ}{y}(l) = 0, \end{gathered} \tag{72}$$

Multipliquemos por $\overset{\circ}{y}(x)\,h$ la ecuación del problema (72) y sumemos según la red $\overset{\circ}{\omega}$ la expresión obtenida. Transformando mediante la fórmula de Green (14) del § 1 la correlación que acabamos de obtener y teniendo en cuenta las condiciones de frontera (72), hallaremos que

$$\|\overset{\circ}{y}\|_{2,0}^2 = (\varphi, \overset{\circ}{y})_\omega + \mathscr{M}_0\overset{\circ}{y}_{x,0} + \mathscr{M}_1\overset{\circ}{y}_{\bar{x},N}, \tag{73}$$

Acotemos los sumandos que figuran en el segundo miembro de la correlación (73). En virtud de la desigualdad de Cauchy (15) del § 1

$$|(\varphi, y)_\omega| \leqslant \|\varphi\|_0 \|\overset{\circ}{y}\|_0.$$

Teniendo presente la desigualdad (65), hallamos que (siendo $0<\sigma<1$)

$$\|\overset{\circ}{y}\|_0 \leqslant \left[\sigma \|\overset{\circ}{y}\|_0^2 + \frac{1-\sigma}{M_6} \|\overset{\circ}{y}\|_{2,0}^2\right]^{1/2}.$$

Al escoger el parámetro σ partiendo de la condición de igualdad de los coeficientes de $\|\overset{\circ}{y}\|_0^2$ e $\|\overset{\circ}{y}\|_{2,0}^2$, hallamos $\|\overset{\circ}{y}\|_0 \leqslant \leqslant \sqrt{(1+M_6)/M_6}\,\|\overset{\circ}{y}\|_2$ y, por consiguiente,

$$|(\varphi, y)_\omega| \leqslant \sqrt{(1+M_6)/M_6}\,\|\overset{\circ}{y}\|_2 \|\varphi\|_0.$$

En el § 4 de este capítulo (teorema 3) será mostrado que para cualquier función de red $v(x)$ prefijada en una red uniforme $\overline{\omega}$

$$\|v_{\bar{x}}\|_{C(\omega^+)}^2 \leqslant M \|v\|_2^2, \quad M = \text{const} > 0. \qquad (74)$$

Haciendo uso de esta desigualdad, hallamos que

$$|\mathscr{M}_0 \overset{\circ}{y}_{x,0} + \mathscr{M}_1 y_{\bar{x},N}| \leqslant (|\mathscr{M}_0| + |\mathscr{M}_1|)\sqrt{M}\,\|\overset{\circ}{y}\|_2.$$

De esta desigualdad y de la igualdad (73) se desprende:

$$\|\overset{\circ}{y}\|_{2,0}^2 \leqslant \left\{\sqrt{\frac{1+M_6}{M_6}}\,\|\varphi\|_0 + \sqrt{M}\,(|\mathscr{M}_0| + |\mathscr{M}_1|)\right\} \|\overset{\circ}{y}\|_2^2.$$

En virtud de (65) tenemos

$$\|\overset{\circ}{y}\|_{2,0}^2 \geqslant \frac{M_6}{1+M_6} \|\overset{\circ}{y}\|_2^2.$$

Sustituyendo esta acotación en el primer miembro de la desigualdad anterior, obtenemos la acotación apriorística para la solución del problema (72):

$$\|\overset{\circ}{y}\|_2 \leqslant \frac{1+M_6}{M_6}\left\{\sqrt{\frac{1+M_6}{M_6}}\,\|\varphi\|_0 + \sqrt{M}\,(|\mathscr{M}_0| + |\mathscr{M}_1|)\right\}.$$

Acotemos la solución del problema (71). Es evidente que

$$\bar{y}(x) = w_0 + \frac{w_1 - w_0}{l}\,x$$

y por lo tanto

$$\|\bar{y}\|_2 = \|\bar{y}\|_0 \leqslant \sqrt{l}\,\|\bar{y}\|_C \leqslant \sqrt{l}\,(|w_0| + |w_1|).$$

Finalmente,

$$\|y\|_2 \leqslant \|\overset{\circ}{y}\|_2 + \|\bar{y}\|_2 \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1+M_6}{M_6}\left\{\sqrt{\frac{1+M_6}{M_6}}\,\|\varphi\|_0 + \sqrt{M}\,(|\mathscr{M}_0| + |\mathscr{M}_1|)\right\} +$$
$$+\sqrt{l}\,(|w_0| + |w_1|).$$

Hemos hallado la acotación de la solución del problema (69), (70). Valiéndonos de los resultados del p. 4 del § 6 del cap. IV, nos será fácil comprobar que el problema (69), (70) aproxima, con el error $O(h^2)$, al problema sobre la flexión de una barra con apoyo articulado, o sea, al problema

$$\begin{gathered} w^{\mathrm{IV}} = \varphi(x), \quad 0 < x < l, \\ w(0) = w_0, \ -w''(0) = \mathscr{M}_0, \ w''(l) = \mathscr{M}_1, \ w(l) = w_1, \end{gathered} \tag{75}$$

En virtud de este hecho de la acotación apriorística obtenida se desprende la convergencia de la solución del problema (69), (70) a la solución del problema (75), siendo la velocidad de convergencia $O(h^2)$.

6. Simulador discreto de una barra elástica con un «extremo libre». Acotemos a priori el problema

$$y_{\bar{x}x\bar{x}x} = \varphi(x), \qquad x \in \dot{\omega},$$
$$y(0) = 0, \quad y_x - \frac{h}{2} y_{xx} + \frac{h^2}{2} y_{xxx}\Big|_{x=0} = \frac{h^3}{2}\varphi(h), \tag{76}$$
$$y_{\bar{x}x,N} = \mathscr{M} + hQ + \frac{h^2}{2}\varphi(l), \qquad -y_{\bar{x}x\bar{x},N} = Q + h\left[\varphi(l-h) + \frac{1}{2}\varphi(l)\right],$$

el cual simula sobre la red $\bar{\omega}$ el problema acerca de la flexión de una barra elástica cuyo extremo izquierdo ($x = 0$) está fijado rígidamente mientras que el extremo derecho se somete a la acción de una fuerza aplicada. Presentemos la solución del problema (76) en forma de suma de las dos funciones $\overset{\circ}{y}(x)$ e $\bar{y}(x)$, donde $\bar{y}(x) = \left[\frac{h}{2}(\overset{\circ}{y}_{xx,0} - h\overset{\circ}{y}_{xxx,0}) + \frac{h^3}{2} + \varphi(h)\right] x$ a la vez que $\overset{\circ}{y}(x)$ es la solución del siguiente problema:

$$\overset{\circ}{y}_{\bar{x}x\bar{x}x} = \varphi(x), \qquad x \in \dot{\omega}, \tag{77}$$

$$\begin{gathered} y(0) = 0, \quad y_{x,0} = 0, \\ y_{\bar{x}x,N} = \mathscr{M} + hQ + \frac{h^2}{2}\varphi(l), \ -\dot{y}_{\bar{x}x\bar{x}} = \\ = Q + h\left[\varphi(l-h) + \frac{1}{2}\varphi(l)\right]. \end{gathered} \tag{78}$$

Multipliquemos por $\overset{\circ}{y}(x)\,h$ la ecuación (77) y sumemos según la red $\overset{\circ}{\omega}$ esta correlación. Transformando de acuerdo con la fórmula de Green (14) del § 1 la identidad obtenida y teniendo presente las condiciones de frontera (78), después de unas transformaciones tendremos

$$\|\overset{\circ}{y}\|_{2,0}=(\varphi,\overset{\circ}{y})_{\overline{\omega}}+Q\overset{\circ}{y}_N+\mathscr{M}\,\overset{\circ}{y}_{\bar{x},N}. \qquad (79)$$

Acotemos el segundo miembro de esta correlación. En vitrud de la desigualdad de Cauchy $|(\varphi,\overset{\circ}{y})|\leqslant\|\varphi\|_0\,\|\overset{\circ}{y}\|_0$. En el § 5 de este capítulo (lema 6) será mostrado que para cualquier función de red $v(x)$ prefijada en la red $\overline{\omega}$ y que verifica las condiciones $v_0=v_1=0$ es justa la desigualdad

$$\|v\|_0^2\leqslant\frac{l^4}{12}\|v\|_{2,0}^2, \qquad (80)$$

así que $\|v\|_0^2\leqslant l^4/(12+l^4)\,\|v\|_2^2$. Por lo tanto,

$$|(\varphi,\overset{\circ}{y})_{\overline{\omega}}|\leqslant\frac{l^2}{\sqrt{12+l^4}}\|\varphi\|_0\|\overset{\circ}{y}\|_2.$$

En virtud de la misma desigualdad (80)

$$\|\overset{\circ}{y}\|_{2,0}^2\geqslant\frac{12}{12+l^4}\|\overset{\circ}{y}\|_2^2.$$

Sustituyendo estas acotaciones en la ecuación (79), hallamos que

$$\|\overset{\circ}{y}\|_2^2\leqslant\frac{12+l^4}{12}\left[\frac{l^2}{\sqrt{12+l^4}}\|\varphi\|_0\|\overset{\circ}{y}\|_2+|Q|\,|\overset{\circ}{y}_N|+|\mathscr{M}|\,|\overset{\circ}{y}_{\bar{x},N}|\right]. \qquad (81)$$

En el § 4 de este capítulo se va a mostrar (teorema 3) que para cualquier función de red $v(x)$ prefijada en la red $\overline{\omega}$ es válida la desigualdad

$$\|v\|_C^2\leqslant\overline{M}\,\|v\|_2^2,\qquad \overline{M}=\text{const}>0. \qquad (82)$$

Tomando en consideración esta desigualdad y la (74), obtendremos

$$|Q|\,|\overset{\circ}{y}_N|+|\mathscr{M}|\,|\overset{\circ}{y}_{\bar{x},N}|\leqslant(\overline{M}\,|Q|+M\,|\mathscr{M}|)\|\overset{\circ}{y}\|_2.$$

A base de esta desigualdad y de la (81) resulta la acotación

$$\|\overset{\circ}{y}\|_2\leqslant\frac{12+l^4}{12}\left[\frac{l^2}{\sqrt{12+l^4}}\|\varphi\|_0+\overline{M}\,|Q|+M\,|\mathscr{M}|\right]. \qquad (83)$$

Acotemos ahora la función $\bar{y}(x)$. Es evidente que

$$\|\bar{y}\|_2\leqslant l^{3/2}\left[\left|\frac{h}{2}(\overset{\circ}{y}_{xx,0}-h\overset{\circ}{y}_{xxx,0})\right|+\frac{h^3}{2}\,|\varphi(h)|\right].$$

No obstante

$$\frac{h}{2}\,|\,\mathring{y}_{xx,0}-h\mathring{y}_{xxx,0}\,|=\frac{1}{2}\,|-2y_{\bar{x},1}+3y_{\bar{x},2}-y_{\bar{x},3}\,|$$

y en virtud de la desigualdad (74) $h/2\,|\,\mathring{y}_{xx,0}-h\mathring{y}_{xxx,0}\,|\leqslant 3M\,\|\,\mathring{y}\,\|_2$. Luego,

$$\frac{h^3}{2}\,|\,\varphi(h)\,|=\frac{h^{5/2}}{2}\,[h\varphi^2(h)]^{1/2}\leqslant\frac{h^{5/2}}{2}\,\|\,\varphi\,\|_0\leqslant\frac{l^{5/2}}{2}\,\|\,\varphi\,\|_0.$$

Teniendo en cuenta esta desigualdad, para $\|\,\bar{y}\,\|_2$ obtendremos la acotación $\|\,\bar{y}\,\|_2\leqslant 3Ml^{3/2}\,\|\,\mathring{y}\,\|_2+l^4/2\,\|\,\varphi\,\|_0$. Sustituyendo aquí la acotación (83) y empleando la desigualdad del triángulo para acotar la norma $y(x)=\mathring{y}+\bar{y}$, obtendremos $\|\,y\,\|_2\leqslant M\,(\|\,\varphi\,\|_0+|\,\mathcal{M}\,|+|\,Q\,|)$, $M=\text{const}>0$.

Como es de costumbre, de esta acotación apriorística se desprende la convergencia de la solución del problema (76) a la solución del correspondiente problema para ecuación diferencial, pero en esto ya no detenemos.

7. Simulador discreto de un sistema de dos barras unidas mediante una articulación perfecta. Véamos cómo se investiga un problema de red cuando existen las condiciones de conjugación. Sea $\bar{\omega}=\{x=x_i\mid x_i=ih,\quad i=0,\ \pm 1,\ \ldots,\ \pm N,\quad h=l/N\}$ una red uniforme con paso h, prefijada sobre el segmento $[-l,\ l]$. Designemos a través de $\bar{\omega}_{iz}$ el subconjunto de los nodos de la red $\bar{\omega}$ situado sobre el segmento $[-l,\ 0]$, es decir, $\bar{\omega}_{iz}=\{x_i\mid i=-N,\ -N+1,\ \ldots,\ 0\}$. Designaremos mediante ω_{iz}, $\mathring{\omega}_{iz}$, ω_{iz}^+, ω_{iz}^+ los subconjuntos de $\bar{\omega}_{iz}$, definibles análogamente a ω, $\mathring{\omega}$, etc. (véase el p. 1 del § 1). Sean $\bar{\omega}_{der}$, ω_{der}, etc., los correspondientes subconjuntos de $\bar{\omega}$ situados sobre el segmento $[0,\ l]$.

Sobre la red $\bar{\omega}$ consideremos el siguiente problema:

$$y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}x}=\varphi(x),\qquad x\in\mathring{\omega}_{iz}\cup\mathring{\omega}_{der},\tag{84}$$

$$\begin{aligned}&y_{\bar{x}\bar{x}}+hy_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}=\mathcal{M}^-\!-h^2\varphi(-h),\quad x=0,\\&-y_{xx}+hy_{xxx}=\mathcal{M}^+ +h^2\varphi(h),\quad x=0,\\&y_{xxx}-y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}=\bar{\varphi}+3h\varphi(0)+h^3\varphi_{\bar{x}x}(0),\quad x=0,\end{aligned}\tag{85}$$

$$\begin{aligned}&y(-l)=0,\ \ y_x-\frac{h}{2}\,y_{xx}+\frac{h^2}{2}\,y_{xxx}|_{x=-l}=\frac{h^3}{2}\,\varphi(-l+h),\\&y_{\bar{x}}+\frac{h}{2}\,y_{\bar{x}\bar{x}}+\frac{h^2}{2}\,x_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}|_{x=l}=-\frac{h^3}{2}\,\varphi(l-h),\quad y(l)=0.\end{aligned}\tag{86}$$

No ofrece dificultad comprobar que el problema (84) — (86) aproxima sobre la red $\bar{\omega}$, con el error $O(h^2)$, el problema acerca de la

flexión del sistema de dos barras unidas entre sí mediante una articulación perfecta en el punto $x = 0$ y sujetas rígidamente en los puntos $x = -l$ y $x = l$:

$$
\begin{gathered}
w^{\mathrm{IV}} = \varphi(x), \quad -l < x < 0, \quad 0 < x < l, \\
[w]|_{x=0} = 0, \quad w''(-0) = \mathscr{M}^-, \quad -w''(+0) = \mathscr{M}^+, \quad [w''']|_{x=0} = \bar{\varphi}, \qquad (87) \\
w(-l) = w'(-l) = w'(l) = w(l) = 0.
\end{gathered}
$$

Las correlaciones (85), que aproximan las condiciones de conjugación del problema (87) fueron compuestas en el cap. IV (véanse las fórmulas (20) y (19) del § 6, siendo $\alpha = \beta = 0$).

Acotemos a priori la solución del problema (84) — (86) Multipliquemos por $y(x)\,h$ las ecuaciones (84), sumemos según las redes $\overset{\bullet}{\omega}_{\mathrm{iz}}$ y $\overset{\circ}{\omega}_{\mathrm{der}}$, luego sumemos las correlaciones obtenidas. Transformando mediante la fórmula de red (14) de Green del § 1, obtenemos la correlación

$$
\begin{gathered}
\| y_{\bar{x}x} \|^2_{L_2(\omega_{\mathrm{iz}})} + \| y_{\bar{x}x} \|^2_{L_2(\omega_{\mathrm{der}})} + (y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}} y^{(-1)} - y_{\bar{x}\bar{x}} y_{\bar{x}})_0 - \\
- (y_{xxx} y^{(+1)} - y_{xx} y_x)_{-l} + (y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}} y^{(-1)} - y_{\bar{x}\bar{x}} y_{\bar{x}})_l - \\
- (y_{xxx} y^{(+1)} - y_{xx} y_x)_0 = (\varphi, y)_{\overset{\circ}{\omega}_{\mathrm{iz}}} + (\varphi, y)_{\overset{\circ}{\omega}_{\mathrm{der}}} .
\end{gathered}
$$

Después de transformar el primer miembro de la obtenida identidad con auxilio de las condiciones de conjugación (85) y las condiciones de frontera (86) obtendremos la siguiente identidad energética:

$$
\begin{gathered}
\| y_{\bar{x}x} \|^2_{L_2(\omega_{\mathrm{iz}})} + \| y_{\bar{x}x} \|_{L_2(\omega_{\mathrm{der}})} + \frac{2}{h} \left(y^2_{\bar{x}}(-l) + y^2_{\bar{x}}(l) \right) = \\
= (\varphi, y)_\omega + \bar{\varphi} y(0) + \mathscr{M}^- y_{\bar{x}}(0) + \mathscr{M}^+ y_x(0). \qquad (88)
\end{gathered}
$$

Acotemos el segundo miembro de esta identidad:

$$
\begin{gathered}
| (\varphi, y)_\omega + \bar{\varphi} y(0) + \mathscr{M}^- y_{\bar{x}}(0) + \mathscr{M}^+ y_x(0) | \leqslant \\
\leqslant \| \varphi \|_0 \| y \|_0 + | \bar{\varphi} | \, | y(0) | + | \mathscr{M}^- | \, | y_{\bar{x}}(0) | + | \mathscr{M}^+ | \, | y_x(0) | \leqslant \\
\leqslant \| \varphi \|_0 \| y \|_0 + | \bar{\varphi} | \, \| y \|_{C(\bar{\omega})} + | \mathscr{M}^- | \, \| y_{\bar{x}} \|_{C(\omega^+_{\mathrm{iz}})} + | \mathscr{M}^+ | \, \| y_{\bar{x}} \|_{C(\omega^+_{\mathrm{der}})} .
\end{gathered}
$$

Utilizando para las acotaciones posteriores la desigualdad ε y tomando en consideración las correlaciones (74), (82), obtenemos

$$
\begin{gathered}
| (\varphi, y)_\omega + \bar{\varphi} y(0) + \mathscr{M}^- y_{\bar{x}}(0) + \mathscr{M}^+ y_x(0) | \leqslant \\
\leqslant \varepsilon (1 + M + \overline{M}) \left(\| y \|^2_{W^2_2(\bar{\omega}_{\mathrm{iz}})} + \| y \|^2_{W^2_2(\bar{\omega}_{\mathrm{der}})} \right) + \\
+ \frac{1}{4\varepsilon} \left(\| \varphi \|^2_0 + | \bar{\varphi} |^2 + | \mathscr{M}^- |^2 + | \mathscr{M}^+ |^2 \right). \qquad (89)
\end{gathered}
$$

Acotemos de abajo el primer miembro de la identidad (88). Suponiendo en el lema 2 del § 5 que $\varkappa_1 = 0$, $\varkappa_0 = 2/h$, $\bar{\omega} = {}^+\omega_{\text{iz}}$ para la función $v(x) = y_x(x)$, prefijada sobre la red ${}^+\omega_{\text{iz}}$, hallaremos la acotación:

$$\| y_{\bar{x}x} \|^2_{L_2(\omega_{\text{iz}})} + \frac{2}{h} y_x^2(-l) \geqslant \frac{1}{l(l-h)} \sum_{\omega^+_{\text{iz}}} y_{\bar{x}}^2 h = \frac{1}{l(l-h)} \| y_{\bar{x}} \|^2_{L_2(\omega^+_{\text{iz}})}. \quad (90)$$

Como $y(-l) = 0$, entonces, haciendo en el lema 2 del § 5 $\varkappa_1 = 0$, $\bar{\omega} = \bar{\omega}_{\text{iz}}$ y pasando al límite para $\varkappa_0 \to \infty$, nos convencemos de la justeza de la desigualdad $\| y_{\bar{x}} \|^2_{L_2(\omega^+_{\text{iz}})} \geqslant \frac{2}{l^2} \| y \|^2_{L_2(\bar{\omega}_{\text{iz}})}$. Atendiendo esta acotación, a base de la acotación (90) hallamos que

$$\| y_{\bar{x}x} \|^2_{L_2(\omega_{\text{iz}})} + \frac{2}{h} y_x^2(-l) \geqslant \frac{2}{l^3(l-h)} \| y \|^2_{L_2(\bar{\omega}_{\text{iz}})}.$$

Suponiendo que $h \leqslant l/2$, tendremos la acotación

$$\| y_{\bar{x}x} \|^2_{L_2(\omega_{\text{dr}})} + 2h^{-1} y_x^2(-l) \geqslant 4l^{-4} \| y \|^2_{L_2(\bar{\omega}_{\text{iz}})}.$$

De esta acotación se desprende que

$$\| y_{\bar{x}x} \|^2_{L_2(\omega_{\text{iz}})} + \frac{2}{h} y_x^2(-l) \geqslant \frac{4}{4+l^4} \| y \|^2_{W_2^2(\bar{\omega}_{\text{iz}})}. \quad (91)$$

Análogamente se demuestra la acotación

$$\| y_{\bar{x}x} \|^2_{L_2(\omega_{\text{der}})} + \frac{2}{h} y_{\bar{x}}^2(l) \geqslant \frac{4}{4+l^4} \| y \|^2_{W_2^2(\bar{\omega}_{\text{der}})}. \quad (92)$$

Regresemos a la identidad energética (88). Teniendo en cuenta las desigualdades (89), (91) y (92), a base de la identidad (88) obtenemos la acotación

$$\left[\frac{4}{4+l^4} - \varepsilon (1 + M + \overline{M}) \right] (\| y \|^2_{W_2^2(\bar{\omega}_{\text{iz}})} + \| y \|^2_{W_2^2(\bar{\omega}_{\text{der}})}) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{4\varepsilon} (\| \varphi \|_0^2 + |\bar{\varphi}|^2 + |\mathcal{M}^-|^2 + |\mathcal{M}^+|^2).$$

Haciendo aquí, por ejemplo, $\varepsilon = 2[(4 + l^4)(1 + M + \overline{M})]^{-1}$, llegamos a la acotación apriorística de la solución del problema (84) — (86):

$$\| y \|^2_{W_2^2(\bar{\omega}_{\text{iz}})} + \| y \|^2_{W_2^2(\bar{\omega}_{\text{der}})} \leqslant M (\| \varphi \|_0^2 + |\bar{\varphi}|^2 + |\mathcal{M}^-|^2 + |\mathcal{M}^+|^2),$$

donde $M = \text{const} > 0$.

A base de la obtenida acotación apriorística se deduce del modo habitual la acotación de la velocidad de convergencia de la solución del problema (84) — (86) a la solución del problema (87).

§ 3. Problemas de red para hallar valores propios

Al obtener unas u otras acotaciones relacionadas con la investigación de los esquemas en diferencias, surge la necesidad de presentar la función de red en forma de desarrollo por funciones propias del problema en diferencias adecuado. En este párrafo se van a estudiar las propiedades fundamentales de los problemas de red elementales para hallar valores propios. Se considerarán los problemas primero y segundo para el operador de la segunda razón de diferencias y para la aproximación de cinco puntos del operador laplaciano en el rectángulo. Todo el estudio de dicho tema se realiza para el caso de una red uniforme.

1. Primer problema de contorno de hallar valores propios para el operador de la segunda razón de diferencias. Como es sabido, la tarea de hallar las funciones propias y los valores propios del problema

$$u''(x) + \lambda u = 0, \quad 0 < x < l, \quad u(0) = u(l) = 0 \tag{1}$$

consiste en obtener los valores del parámetro λ (que son valores propios) para los cuales existen soluciones $u(x)$ (que son funciones propias) no triviales (o sea, diferentes del cero idéntico) del problema homogéneo (1).

La análoga de red del problema (1) se enuncia del siguiente modo. Sea dada sobre el segmento $[0, l]$ una red uniforme $\bar{\omega}$ con el paso $h = l/N$. Sobre la red $\bar{\omega}$ es preestablecida una aproximación en diferencias del problema (1):

$$y_{\bar{x}x} + \lambda y = 0, \quad x \in \omega, \quad y_0 = y_N = 0. \tag{2}$$

Se pide hallar los valores del parámetro λ (*valores propios*) para los cuales existen soluciones $y(x)$ (*funciones propias*) no triviales del problema (2).

Hallemos la forma de la solución general del problema (2). Reescribamos la ecuación (2) del siguiente modo:

$$y_{j-1} - 2\left(1 - \frac{h^2\lambda}{2}\right) y_j + y_{j+1} = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, N-1. \tag{3}$$

Introduzcamos la designación que sigue:

$$1 - \frac{h^2\lambda}{2} = \cos \alpha h. \tag{4}$$

Valiéndonos de la designación (4), podemos reducir la ecuación característica (3) a la forma $q^2 - 2\cos \alpha h q + 1 = 0$. Las raíces de esta ecuación son $q_1 = e^{i\alpha h}$, $q_2 = e^{-i\alpha h}$. Por consiguiente, la solución general de la ecuación (2) tiene la forma

$$y(x) = C_1 e^{i\alpha x} + C_2 e^{-i\alpha x} = c_1 \operatorname{sen} \alpha x + c_2 \cos \alpha x.$$

Las constantes c_1 y c_2 se determinan partiendo de las condiciones de frontera (2):

$$y(0) = c_2 = 0, \quad y(l) = c_1 \operatorname{sen} \alpha l = 0. \tag{5}$$

Para que se cumpla la segunda de las correlaciones (5) es necesario que se anule c_1 ó $\operatorname{sen} \alpha l$. Pero c_1 no puede ser igual a cero puesto que $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$. Por consecuencia, $\operatorname{sen} \alpha l = 0$, o sea, $\alpha = k\pi/l$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ Por lo tanto, las soluciones del problema (2) son las funciones

$$\mu_k(x) = c \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{l}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{6}$$

A base de (4) hallamos que los valores propios del problema (2) se encuentran entre los valores siguientes:

$$\lambda_k = \frac{4}{h^2} \operatorname{sen}^2 \frac{k\pi h}{2l}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Señalemos que el número cero no puede ser valor propio del problema (2) ya que a éste le corresponde una solución idénticamente igual a cero. Entre los términos restantes de la sucesión indicada anteriormente existen sólo $(N-1)$ términos diferentes entre sí, por ejemplo, λ_k, siendo $k = 1, 2, \ldots, N-1$. Estos son valores propios del problema (2).

Demostremos ahora que las funciones propias $\mu_k(x)$, definibles por la correlación (6), siendo $k = 1, 2, \ldots, N-1$, son ortogonales dos a dos. En efecto, sea que al valor propio λ_k le corresponde una fución propia $\mu_k(x)$ a la vez que al valor propio λ_m, una función propia $\mu_m(x)$. Supongamos que $k \neq m$ y $1 \leqslant k, m \leqslant N-1$. Hallemos el producto escalar de la correlación

$$\mu_{k\bar{x}x} + \lambda_k \mu_k = 0, \quad x \in \omega, \tag{7}$$

por $\mu_m(x)$ y el de la correlación

$$\mu_{m\bar{x}x} + \lambda_m \mu_m = 0, \quad x \in \omega,$$

por $\mu_k(x)$ y sustrayamos el segundo del primero. Nos resulta

$$0 = (\mu_{k\bar{x}x}, \mu_m)_\omega - (\mu_{m\bar{x}x}, \mu_k)_\omega + (\lambda_k - \lambda_m)(\mu_k, \mu_m)_\omega.$$

Aplicando a los dos primeros sumandos del segundo miembro la primera fórmula en diferencias de Green (12) del § 1, como resultado tenemos

$$0 = -(\mu_{k\bar{x}}, \mu_{m\bar{x}})_{\omega^+} + (\mu_{m\bar{x}}, \mu_{k\bar{x}})_{\omega^+} + (\lambda_k - \lambda_m)(\mu_k, \mu_m)_\omega = \\ = (\lambda_k - \lambda_m)(\mu_k, \mu_m)_\omega.$$

Ya que, cuando $k \neq m$, $1 \leqslant k, m \leqslant N-1$, $\lambda_k \neq \lambda_m$, entonces,

$$(\mu_k, \mu_m)_\omega = 0.$$

Por lo tanto las funciones propias son ortogonales. Escojamos la constante c en (6) de modo que las funciones propias tengan la norma igual a la unidad. Unos cálculos obvios muestran que

$$(\mu_k, \mu_k)_\omega = c^2 l/2.$$

Haciendo $c = \sqrt{2/l}$, hallamos que $\| \mu_k \|_0 = 1$.

Calculemos la razón en diferencias izquierda de las funciones propias (6), siendo $c = \sqrt{2/l}$:

$$[\mu_k(x)]_{\bar{x}} = \sqrt{2/l}\,\frac{\operatorname{sen}(k\pi x/l) - \operatorname{sen}(k\pi(x-h)/l)}{h} =$$

$$= \sqrt{2/l}\,\frac{2\operatorname{sen}(k\pi h/(2l))}{h}\cos\frac{k\pi(x-h/2)}{l} = \sqrt{\lambda_k}\sqrt{2/l}\cos(k\pi(x-h/2)/l).$$

Multipliquemos como escalares la ecuación (7) por $\mu_m(x)$ y transformemos la obtenida correlación con auxilio de la primera fórmula de Green (12) del § 1:

$$0 = (\mu_{k\bar{x}x}, \mu_m)_\omega + \lambda_k(\mu_k, \mu_m)_\omega = -(\mu_{k\bar{x}}, \mu_{m\bar{x}})_{\omega^+} + \lambda_k(\mu_k, \mu_m)_\omega.$$

De aquí se desprende que, siendo $k \neq m$

$$(\mu_{k\bar{x}}, \mu_{m\bar{x}})_{\omega^+} = 0,$$

es decir, las razones en diferencias de las funciones propias son ortogonales en el sentido del producto escalar $(,)_{\omega^+}$.

Sea $f(x)$ una función de red arbitraria prefijada sobre la red ω (o una función de red preestablecida sobre la red $\bar{\omega}$ y reducible a cero cuando $x = 0$ y $x = l$). Desarrollemos $f(x)$ por las funciones propias $\{\mu_k(x)\}_1^{N-1}$, o sea, representemos $f(x)$ como suma de la forma

$$f(x) = \sum_{k=1}^{N-1} f_k \mu_k(x), \tag{8}$$

donde f_k son los coeficientes de Fourier de la función $f(x)$. Multiplicando la correlación (8) como escalar por $\mu_m(x)$, hallamos que

$$(f, \mu_m)_\omega = \sum_{k=1}^{N-1} f_k(\mu_k, \mu_m)_\omega = f_m.$$

Elevemos al cuadrado el primero y el segundo miembros de (8) y multipliquemos escalarmente por la unidad

$$(f^2, 1)_\omega = \Big(\Big(\sum_{k=1}^{N-1} f_k\mu_k(x)\Big)^2, 1\Big) = \sum_{k,\,m=1}^{N-1} f_k f_m(\mu_k, \mu_m)_\omega = \sum_{k=1}^{N-1} f_k^2.$$

La correlación obtenida es una análoga de la igualdad de Parseval.

Investiguemos con más detalle los valores propios λ_k del problema (2). Observemos que la función $\operatorname{sen}\frac{k\pi h}{2l}$ crece monótonamente al variar k de 1 a $N-1$. Consiguientemente, $\lambda_k < \lambda_m$ cuando

$k < m$. Es sabido que, siendo $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$, para la función $(\text{sen}\,\alpha)/\alpha$ son válidas las acotaciones

$$2/\pi \leqslant (\text{sen}\,\alpha)/\alpha \leqslant 1.$$

Como

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \left(\frac{\text{sen}\,(k\pi h/(2l))}{k\pi h/(2l)}\right)^2 = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \left(\frac{\text{sen}\,\alpha}{\alpha}\right)^2, \tag{9}$$

entonces, $(2k/l)^2 \leqslant \lambda_k \leqslant (k\pi/l)^2$ y, en particular,

$$\lambda_k \geqslant \lambda_1 \geqslant 4/l^2.$$

En realidad es justa la acotación más precisa de abajo del primer valor propio λ_1. A base de (9) tenemos

$$\frac{d\lambda_k}{d\alpha} = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \frac{\text{sen}\,2\alpha}{\alpha^3}(\alpha - \text{tg}\,\alpha) < 0, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

De aquí se deduce que los valores propios decrecen al aumentar el paso h, pero como el paso máximo de la red ω sobre el segmento $[0, l]$ para el problema (2) es $h_0 = l/2$, entonces

$$\lambda_1(h_0) = 8/l^2 \leqslant \lambda_1(h) \leqslant \lambda_k(h).$$

Hagamos el balance de las noticias que hemos recibido en lo que se refiere a las funciones propias y los valores propios del problema (2). Para acentuar la analogía entre las funciones propias y los valores propios de los problemas (1) y (2) aducimos paralelamente las propiedades de las soluciones del problema (1).

Para el problema (1)	Para el problema (2)	
Funciones propias		
$u_k(x) = \sqrt{2/l}\,\text{sen}\,\frac{k\pi x}{l}$,	$\mu_k(x) = \sqrt{2/l}\,\text{sen}\,\frac{k\pi x}{l}$,	
$k = 1, 2, \ldots$	$k = 1, 2, \ldots, N-1$	(10)
Valores propios		
$\lambda_k = (k\pi/l)^2$,	$\lambda_k = \frac{4}{h^2}\,\text{sen}^2\,\frac{k\pi h}{2l}$,	
$k = 1, 2, \ldots$,	$k = 1, 2, \ldots, N-1$,	(11)
	$(2k/l)^2 \leqslant \lambda_k \leqslant (k\pi/l)^2$,	
$\lambda_k > \lambda_m$, siendo $k > m$	$\lambda_k > \lambda_m$, siendo $k > m$,	
	$\lambda_1 \geqslant 8/l^2$	(12)
Ortonormalización de las funciones propias		
$\int_0^l u_k(x)\, u_m(x)\, dx = \delta_{k,m}$	$(\mu_k, \mu_m)_\omega = \sum_\omega \mu_k(x)\,\mu_m(x)\,h = \delta_{k,m}$,	(13)

donde $\delta_{k,m}$ es el símbolo de Kronecker, es decir,

$$\delta_{k,m}=\begin{cases}1, & \text{siendo} \quad k=m,\\ 0, & \text{siendo} \quad k\neq m.\end{cases}$$

Derivadas (razones en diferencias) de las funciones propias

$$u'_k(x)=\sqrt{\lambda_k}\sqrt{2/l}\cos\frac{k\pi x}{l},\quad k=1, 2, \ldots$$

$$\mu_{k\bar{x}}=\sqrt{\lambda_k}\sqrt{2/l}\cos\frac{k\pi(x-h/2)}{l}=\sqrt{\lambda_k}\mu_k(x),\quad k=1, 2, \ldots, N-1$$

Ortogonalidad de las derivadas (razones en diferencias) de las funciones propias

$$\int_0^l u'_k(x)\,u'_m(x)\,dx=\lambda_k\delta_{k,m}$$

$$(\mu_{k\bar{x}}, \mu_{m\bar{x}})_{\omega^+}=\sum_{\omega^+}\mu_{k\bar{x}}\mu_{m\bar{x}}h=\lambda_k\delta_{k,m}$$

Complitud del sistema de funciones propias

Para cualquier función $f(x)\in L_2(0, l)$,

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k u_k(x),$$

donde

$$f_k=\int_0^l f(x)\,u_k(x)\,dx,\quad k=1, 2, \ldots$$

Para cualquier función de red $f(x)$ prefijada sobre la red ω

$$f(x)=\sum_{k=1}^{N-1} f_k\mu_k(x), \tag{14}$$

donde

$$f_k=(f, \mu_k)_\omega,\quad k=1, 2, \ldots, N-1 \tag{15}$$

Igualdad de Parseval

$$\|f\|^2_{L_2(0,l)}=\int_0^l f^2\,dx=\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2$$

$$\|f\|^2_{L_2(\omega)}=\|f\|_0^2=(f,f)_\omega=\sum_{k=1}^{N-1} f_k^2 \tag{16}$$

2. Segundo problema de contorno de hallar valores propios para un operador de diferencia segunda.

Consideremos la análoga de red del problema

$$u''(x)+\lambda u=0,\quad 0<x<l,\quad u'(0)=u'(l)=0.$$

Las condiciones de frontera se aproximarán con el error $O(h^2)$. A saber:

$$y_{\bar{x}x}+\lambda y=0, \quad x\in\omega, \quad y_{x,0}+\frac{h}{2}\lambda y_0=0, \quad y_{\bar{x},N}-\frac{h\lambda}{2}y_N=0. \qquad (17)$$

Prestemos la atención a que en el problema en diferencias (17) los valores propios se contienen en las condiciones de frontera, aunque en el problema, que se aproxima, las condiciones de frontera no los contenían.

Sea $\mathring{\bar{\Lambda}}$ el operador de red definible mediante las correlaciones

$$\mathring{\bar{\Lambda}}v=\begin{cases}-\frac{2}{h}v_x, & x=0,\\ -v_{\bar{x}x}, & x\in\omega,\\ \frac{2}{h}v_{\bar{x}}, & x=l.\end{cases} \qquad (18)$$

Entonces, el problema (17) puede escribirse así:

$$\mathring{\bar{\Lambda}}y=\lambda y, \quad x\in\bar{\omega}.$$

Las soluciones del problema (17) y las propiedades del mismo se obtienen del mismo modo que en el caso del problema (2). Por esta razón no nos detenemos en la obtención de éstas, sino que aducimos el resumen de los resultados.

1) Las funciones propias son

$$\begin{aligned}&\mu_k(x)=\sqrt{2/l}\cos(k\pi x/l), \quad k=1, 2, \ldots, N-1,\\ &\mu_0(x)=\sqrt{1/l}, \quad \mu_N(x)=\sqrt{1/l}\cos(N\pi x/l).\end{aligned} \qquad (19)$$

2) Los valores propios son

$$\lambda_k=\frac{4}{h^2}\operatorname{sen}^2\frac{k\pi h}{2l}, \qquad k=0, 1, \ldots, N, \qquad (20)$$

$$(2k/l)^2\leqslant\lambda_k\leqslant(k\pi/l)^2, \qquad k=1, 2, \ldots, N, \qquad (21)$$

$$\lambda_k>\lambda_m, \qquad k>m, \qquad (22)$$

$$\lambda_1\geqslant 8/l^2, \qquad \lambda_0=0. \qquad (23)$$

3) La ortonormalización de las funciones propias consiste en que

$$(\mu_k, \mu_m)_{\bar{\omega}}=\delta_{k,m}. \qquad (24)$$

4) Las razones en diferencias de las funciones propias son

$$\begin{aligned}&(\mu_k(x))_{\bar{x}}=-\sqrt{\lambda_k}\sqrt{2/l}\operatorname{sen}k\pi((x-h/2)/l)=\sqrt{\lambda_k}\mu_k(x),\\ &\qquad\qquad k=1, 2, \ldots, N-1,\\ &(\mu_N(x))_{\bar{x}}=-\sqrt{\lambda_N}\sqrt{1/l}\operatorname{sen}N\pi((x-h/2)/l)=\sqrt{\lambda_N}\mu_N(x).\end{aligned} \qquad (25)$$

5) La ortogonalidad de las razones en diferencias de las funciones propias

$$(\mu_{k\bar{x}}, \mu_{m\bar{x}})_{\omega^+} = \lambda_k \delta_{k,m}. \tag{26}$$

6) Las funciones propias forman una base sobre la red $\bar{\omega}$. Para cualquier función de red $f(x)$ prefijada sobre la red $\bar{\omega}$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N} f_k \mu_k(x), \tag{27}$$

donde

$$f_k = (f, \mu_k)_{\bar{\omega}}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N, \tag{28}$$

son los coeficientes de Fourier de la función $f(x)$.

7) La igualdad de Parseval es

$$\| f \|^2_{L_2(\bar{\omega})} = \| f \|^2_0 = (f, f)_{\bar{\omega}} = \sum_{k=0}^{N} f_k^2. \tag{29}$$

3. Problemas de hallar valores propios para el operador de red laplaciano. Sea dada en el rectángulo $\bar{G} = \{0 \leqslant x_\alpha \leqslant l_\alpha, \alpha = 1,2\}$ una red uniforme rectangular $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2$. Sea $\omega = \omega_1 \times \omega_2$ el conjunto de los nodos interiores de esta red y $\gamma = \bar{\omega} \setminus \omega$, el conjunto de los nodos de frontera de la misma. Consideremos sobre la red $\bar{\omega}$ el siguiente problema de hallar los valores propios:

$$\Lambda y \equiv -y_{\bar{x}_1 x_1} - y_{\bar{x}_2 x_2} = \lambda y, \quad x \in \omega, \quad y(x) = 0, \quad x \in \gamma. \tag{30}$$

Es fácil ver que el problema (30) admite una separación de las variables y tiene la solución

$$\begin{gathered} \mu_k(x) = \mu_{1,k_1}(x_1)\, \mu_{2,k_2}(x_2), \quad \lambda_k = \lambda_{1,k_1} + \lambda_{2,k_2}, \\ k = (k_1, k_2), \quad k_\alpha = 1, 2, \ldots, N_\alpha - 1, \quad \alpha = 1, 2, \end{gathered} \tag{31}$$

donde $\mu_{\alpha, k_\alpha}(x_\alpha)$ se preestablece mediante la correlación (10), siendo $l = l_\alpha$, $k = k_\alpha$, $x = x_\alpha$ en tanto que $\lambda_{\alpha, k_\alpha}$ se prefija por la correlación (11), siendo $l = l_\alpha$, $k = k_\alpha$, $h = h_\alpha = l_\alpha / N_\alpha$. Las funciones propias (31) del problema (30) están ortonormalizadas, es decir,

$$(\mu_k(x), \mu_m(x))_\omega = \sum_{\omega_1} h_1 \sum_{\omega_2} h_2 \mu_k(x_1, x_2)\, \mu_m(x_1, x_2) = \delta_{k,m}.$$

Consideremos sobre la red $\bar{\omega}$ un problema más de hallar valores propios

$$\bar{\Lambda} y \equiv (\mathring{\bar{\Lambda}}_1 + \mathring{\bar{\Lambda}}_2)\, y = \lambda y, \qquad x \in \bar{\omega}. \tag{32}$$

donde el operador $\overset{\circ}{\overline{\Lambda}}_\alpha$ se determina por la correlación (18), siendo $x = x_\alpha$, $l = l_\alpha$, $h = h_\alpha$, $\omega = \omega_\alpha$. El problema (32) es la análoga de red del segundo problema de contorno de hallar los valores propios para el operador bidimensional laplaciano en el rectángulo. Igual que el (30), dicho problema admite la separación de las variables y tiene la siguiente solución:

$$\mu_k(x) \equiv \mu_{1,k_1}(x_1)\,\mu_{2,k_2}(x_2), \qquad \lambda_k = \lambda_{1,k_1} + \lambda_{2,k_2}, \tag{33}$$
$$k = (k_1, k_2), \quad k_\alpha = 0, 1, \ldots, N_\alpha, \quad \alpha = 1, 2,$$

donde $\mu_{\alpha,k_\alpha}(x_\alpha)$ se da por las correlaciones (19), siendo $l = l_\alpha$, $k = k_\alpha$, $x = x_\alpha$, mientras que $\lambda_{\alpha,k_\alpha}$ se prefija por las correlaciones (20), siendo $l = l_\alpha$, $k = k_\alpha$, $h = h_\alpha = l_\alpha/N_\alpha$. Las funciones propias (33) del problema (32) son ortonormalizadas:

$$(\mu_k(x), \mu_m(x))_{\overline{\omega}} = \delta_{k,m}.$$

§ 4. Teoremas de encajamiento

En el § 2 de este capítulo, al obtener las acotaciones apriorísticas para las soluciones de los problemas de red sobre un segmento, tropezamos con la necesidad de comparar las normas diferentes de una misma función. Al comparar las normas, se requerían las acotaciones de una norma a través de otra con constantes no dependientes de la red. Una situación análoga surge también al estudiar problemas de red polidimensionales.

En este párrafo deduciremos una serie de las desigualdades de este tipo, que establecen enlace entre ciertas normas de las funciones de red dadas sobre una red situada en un segmento o en un rectángulo. Se considerarán sólo las desigualdades en las cuales las constantes no dependen ni de la misma función ni de la red sobre la cual se da dicha función. Las propuestas que afirman estas desigualdades las llamaremos teoremas de encajamiento.

1. Teoremas de encajamiento para las funciones de red de un argumento. Estudiaremos las funciones de red dadas en la red $\overline{\omega} \in [0, l]$. En unos teoremas de este punto supondremos que la red es uniforme mientras que en otros no utilizaremos la suposición acerca de la uniformidad de la red. Recordemos las designaciones para las normas de funciones de red, las cuales emplearemos en este punto:

$$\|v\|_C = \max_{x\in\overline{\omega}} |v(x)|, \qquad \|v_{\bar{x}}\|_C = \max_{x\in\omega^+} |v_{\bar{x}}(x)|,$$
$$\|v\|_0 \equiv \|v\|_{L_2(\overline{\omega})} = (v, v)_{\overline{\omega}}^{1/2}, \qquad \|v_{\bar{x}}\|_0 = (v_{\bar{x}}, v_{\bar{x}})_{\omega^+}^{1/2},$$
$$\|v_{\bar{x}x}\|_0 = (v_{\bar{x}x}, v_{\bar{x}x})_{\omega}^{1/2}.$$

TEOREMA 1. *Para cualquier función de red $v(x)$ dada en una red no uniforme arbitraria $\bar{\omega}$ y reducible a cero, siendo $x = 0$ y $x = l$, es válida la desigualdad*

$$\|v\|_C^2 \leqslant M_1 \|v_{\bar{x}}\|_0^2, \quad (1)$$

donde $M_1 = l/4$.

DEMOSTRACION. Para la función $v(x)$ son justas las representaciones:

$$v_i = \sum_{j=1}^{i} v_{\bar{x},j} h_j, \qquad v_i = -\sum_{j=i+1}^{N} v_{\bar{x},j} h_i.$$

De aquí, empleando las desigualdades de Cauchy (15) del § 1, obtenemos

$$v_i^2 \leqslant x_i \sum_{j=1}^{i} v_{\bar{x},j}^2 h_j, \quad (2)$$

$$v_i^2 \leqslant (l - x_i) \sum_{j=i+1}^{N} v_{\bar{x},j}^2 h_j. \quad (3)$$

Multipliquemos la desigualdad (2) por $(l - x_i)$ y la desigualdad (3) por x_i. Sumemos las correlaciones obtenidas y dividamos el resultado en l. Entonces,

$$v^2(x) \leqslant \frac{x(l-x)}{l} \|v_{\bar{x}}\|_0^2 \leqslant \frac{l}{4} \|v_{\bar{x}}\|_0^2, \qquad x \in \bar{\omega}.$$

Como esta desigualdad es válida para x cualquiera, también será justa para aquel $x = x_0$ con el que la función $v^2(x)$ alcanza el valor máximo. El teorema queda demostrado.

OBSERVACIÓN 1. La desigualdad (1) es válida (con la constante $M_1 = l$) también para las funciones que se anulan cuando $x = 0$ ó $x = l$.

OBSERVACIÓN 2. La desigualdad (1) con $M_1 = l/4$ es exacta en el sentido de que existen una red $\bar{\omega}$ y una función $v(x)$ tales para las cuales (1) se hace igualdad. De ejemplo puede servir la función $v(x) = |x - l/2|$ sobre cualquier red cuyo punto $x = l/2$ es nodal.

La generalización del teorema 1 para el caso de las funciones de red arbitrarias es el

TEOREMA 2. *Para cualquier función de red $v(x)$ prefijada sobre una red no uniforme arbitraria $\bar{\omega}$ es válida la desigualdad*

$$\|v\|_C^2 \leqslant \varepsilon \|v_{\bar{x}}\|_0^2 + (1/\varepsilon + 1/l) \|v\|_0^2, \quad (4)$$

donde ε es una constante positiva arbitraria.

DEMOSTRACIÓN. De las correlaciones

$$v_i^2 = v_j^2 + \sum_{k=j+1}^{i} (v^2)_{\bar{x},k} h_k, \qquad i \geqslant j,$$

$$v_i^2 = v_j^2 - \sum_{k=i+1}^{j} (v^2)_{\bar{x},k} h_k, \qquad i \leqslant j,$$

se deduce que para cualesquiera que sean $(x, y) \in \bar{\omega}$

$$v^2(x) \leqslant v^2(y) + (|(v^2)_{\bar{x}}|, 1)_{\omega^+}.$$

Considerando que x es fijo, multipliquemos esta desigualdad como escalar por 1:

$$lv^2(x) \leqslant \|v\|_0^2 + l(|(v^2)_{\bar{x}}|, 1)_{\omega^+}. \tag{5}$$

Es fácil ver que (aquí $v^{(-1)} \equiv v_{i-1}$)

$$(v^2)_{\bar{x}} = (v + v^{(-1)}) v_{\bar{x}}.$$

Teniendo en cuenta la desigualdad de Cauchy (15) del § 1 y la desigualdad ε (16) del § 1, resulta que

$$(|v^2|_{\bar{x}}, 1)_{\omega^+} \leqslant (|v|, |v_{\bar{x}}|)_{\omega^+} + (|v^{(-1)}|, |v_{\bar{x}}|)_{\omega^+} \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \|v_{\bar{x}}\|_0^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\Big[\sum_{x\in\omega^+} v^2(x-h)h + \sum_{x\in\omega^+} v^2(x)h\Big] = \varepsilon\|v_{\bar{x}}\|_0^2 + \frac{1}{\varepsilon}\|v\|_0^2.$$

Sustituyendo esta acotación en (5) y dividiendo por l la correlación obtenida, llegamos a la desigualdad (4). El teorema queda demostrado.

En la desigualdad afirmada por el teorema 2 en vez de la función puede ponerse su razón en diferencias.

LEMA 1. *Para cualquier función de red $v(x)$ preestablecida sobre una red uniforme $\bar{\omega}$ es válida la desigualdad*

$$\|v_{\bar{x}}\|_C^2 \leqslant \varepsilon \|v_{\bar{x}x}\|_0^2 + (1/\varepsilon + 1/l)\|v_{\bar{x}}\|_0^2. \tag{6}$$

DEMOSTRACIÓN. Recurriendo a los razonamientos análogos a los empleados en la demostración de la desigualdad (5), obtendremos que

$$lv_{\bar{x}}^2(x) \leqslant \|v_{\bar{x}}\|_0^2 + l(|(v_{\bar{x}}^2)_x|, 1)_\omega. \tag{7}$$

Ya que

$$(v_{\bar{x}}^2)_x = (v_x + v_{\bar{x}}) v_{\bar{x}x},$$

entonces, en virtud de la desigualdad de Cauchy (15) del § 1 y la desigualdad ε (16) del § 1 tenemos

$$(|(v_{\bar{x}}^2)_x|, 1)_\omega \leqslant \varepsilon\|v_{\bar{x}x}\|_0^2 + \frac{1}{2\varepsilon}(v_{\bar{x}}^2 + v_x^2, 1)_\omega \leqslant \varepsilon\|v_{\bar{x}x}\|_0^2 + \frac{1}{\varepsilon}\|v_{\bar{x}}\|_0^2.$$

Poniendo esta desigualdad en (7), nos resulta la desigualdad (6). El lema queda demostrado.

LEMA 2. *Para una función de red $v(x)$ cualquiera, dada sobre una red uniforme $\bar{\omega}$ es válida la desigualdad*

$$\|v_{\bar{x}}\|_0^2 \leqslant \varepsilon \|v_{\bar{x}x}\|_0^2 + M(1/\varepsilon + 1/l^2)\|v\|_0^2, \tag{8}$$

donde ε es una constante positiva arbitraria en tanto que M es una constante positiva determinada independiente de $\bar{\omega}$. Si la función $v(x)$, cuando $x = 0$ ó $x = l$, se hace igual a cero, entonces, a la par de la (8), *para ésta es válida también una igualdad más exacta*

$$\|v_{\bar{x}}\|_0^2 \leqslant \varepsilon \|v_{\bar{x}x}\|_0^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\|v\|_0^2. \tag{9}$$

DEMOSTRACIÓN. Multipliquemos la desigualdad

$$\left(l\sqrt{\alpha}\, v_{\bar{x}x} + \frac{1}{l\sqrt{\alpha}}\, v\right)^2 \geqslant 0$$

por h, sumemos el resultado según $x \in \omega$ y transformemos la obtenida correlación mediante la fórmula de Green (12) del § 1

$$l^2\alpha\|v_{\bar{x}x}\|_0^2 + \frac{1}{l^2\alpha}\|v\|_0^2 - 2\|v_{\bar{x}}\|_0^2 + 2\left(v_{\bar{x}}v\,|_{x=l} - v_x v\,|_{x=0}\right) \geqslant 0.$$

Si $v(0) = v(l) = 0$, entonces, haciendo aquí $l^2\alpha/2 = \varepsilon$, obtendremos la desigualdad (9). Mas en el caso general, después de unas operaciones evidentes, hallamos que

$$\|v_{\bar{x}}\|_0^2 \leqslant \frac{\alpha l^2}{2}\|v_{\bar{x}x}\|_0^2 + \frac{1}{2\alpha l^2}\|v\|_0^2 + \beta l\left(v_{\bar{x}}^2(0) + v_{\bar{x}}^2(l)\right) + \frac{1}{4\beta l}\left(v^2(0) + v^2(l)\right). \tag{10}$$

Acotemos los sumandos contenidos entre paréntesis. Haciendo en la desigualdad (4) $\varepsilon = \gamma l$ y en (6) $\varepsilon = \delta l$, obtenemos que

$$v^2(0) + v^2(l) \leqslant 2\|v\|_C^2 \leqslant 2\gamma l\|v_{\bar{x}}\|_0^2 + 2(1/(\gamma l) + 1/l)\|v\|_0^2,$$

$$v_{\bar{x}}^2(0) + v_{\bar{x}}^2(l) \leqslant 2\|v_{\bar{x}}\|_C^2 \leqslant 2\delta l\|v_{\bar{x}x}\|_0^2 + 2(1/\delta l) + 1/l)\|v_{\bar{x}}\|_0^2.$$

Poniendo estas acotaciones en (10) y transformando la desigualdad obtenida, tendremos

$$\|v_{\bar{x}}\|_0^2 \leqslant l^2\frac{\alpha/2 + 2\beta\delta}{1 - 2\beta - 2\beta/\delta - \gamma/(2\beta)}\|v_{\bar{x}x}\|_0^2 + \frac{1}{2l^2}\,\frac{1/\alpha + 1/(\beta\gamma) + 1/\beta}{1 - 2\beta - 2\beta/\delta - \gamma/(2\beta)}\|v\|_0^2, \tag{11}$$

donde α, β, γ y δ son las constantes positivas arbitrarias que verifican la condición

$$1 - 2\beta - 2\beta/\delta - \gamma/(2\beta) > 0 \tag{12}$$

Mostremos que estas constantes pueden elegirse de modo que el coeficiente de $\| v_{\bar{x}x} \|_0^2$ sea tan pequeño como quiera. Designemos

$$\zeta = \frac{\alpha/2 + 2\beta\delta}{1 - 2\beta - 2\beta/\delta - \gamma/(2\beta)} \tag{13}$$

y de aquí hallemos δ. Tenemos

$$\delta = \frac{1}{4\beta}\Big(\zeta - 2\beta\zeta - \alpha/2 - \gamma\zeta/(2\beta) + \sqrt{(\zeta - 2\beta\zeta - \alpha/2 - \gamma\zeta/(2\beta))^2 - 8\beta^2\zeta}\Big) > 0.$$

Supongamos que la expresión subradical es igual a cero. Entonces,

$$\delta = \sqrt{\zeta/2}. \tag{14}$$

Pongamos este valor de δ en la fórmula (13) y hallemos de la misma

$$\beta = \frac{\zeta - \alpha/2 + \sqrt{(\zeta - \alpha/2)^2 - 4\gamma\zeta\,(\zeta + 3\sqrt{\zeta}/\sqrt{2})}}{4\,(\zeta + 3\sqrt{\zeta}/\sqrt{2})} > 0$$

Suponiendo que

$$\zeta - \alpha/2 > 0, \tag{15}$$

de nuevo igualemos a cero la expresión subradical. En tal caso

$$\beta = \sqrt{\zeta}\,\frac{1 - \alpha/(2\zeta)}{4\,(3\sqrt{2} + \sqrt{\zeta})}, \tag{16}$$

$$\gamma = \sqrt{\zeta}\,\frac{(1 - \alpha/(2\zeta))^2}{4\,(3/\sqrt{2} + \sqrt{\zeta})}. \tag{17}$$

Señalemos que, al cumplir la condición (15), las constantes β, γ y δ, definibles por las correlaciones (16), (17) y (14), también satisfacen la condición (12).

Haciendo ahora, por ejemplo, $\alpha = \zeta$ y tomando en consideración las correlaciones (14), (16) y (17), hallamos que

$$M(\zeta) = \frac{1/\alpha + 1/(\beta\gamma) + 1/\beta}{2\,(1 - 2\beta - 2\beta/\delta - \gamma/(2\beta))} = \frac{1/\zeta + 2^7\,(3/\sqrt{2} + \sqrt{\zeta})^2/\zeta + 8\,(3\sqrt{\zeta}/\sqrt{2} + 1)/\zeta}{2\left(1 - \dfrac{(\sqrt{\zeta} + \sqrt{2}}{4\,(3/\sqrt{2} + \sqrt{\zeta})} - \dfrac{1}{4}\right)} =$$

$$= 2\,\frac{(3/\sqrt{2} + \sqrt{\zeta})^2}{\zeta} \cdot \frac{1 + 2^7\,(3/\sqrt{2} + \sqrt{\zeta})^2 + 8\,(3\sqrt{\zeta}/\sqrt{2} + 1)}{(7\sqrt{2} + 2\sqrt{\zeta})\,(3/\sqrt{2} + \sqrt{\zeta})} \leqslant M\,(1 + 1/\zeta).$$

Poniendo esta acotación en (10) y designando $l^2\zeta$ a través de ε, obtenemos la desigualdad (8). El lema se ha demostrado.

TEOREMA 3. *Para una función de red cualquiera $v(x)$ prefijada en una red uniforme $\overline{\omega}$ son válidas las desigualdades*

$$\|v\|_C^2 \leqslant \varepsilon \| v_{\bar{x}x} \|_0^2 + M (1/l + 1/\varepsilon^{1/3}) \| v \|_0^2, \tag{18}$$

$$\| v_{\bar{x}} \|_C^2 \leqslant \varepsilon \| v_{\bar{x}x} \|_0^2 + M (1/l + 1/\varepsilon^3) \| v \|_0^2, \tag{19}$$

donde $\varepsilon > 0$ es un número arbitrario mientras que M, una constante positiva determinada que no depende de la red $\overline{\omega}$ ni de la función $v(x)$.

DEMOSTRACIÓN. Primero demostremos la desigualdad (18). Hagamos en la desigualdad (4) $\varepsilon = \alpha l$ y en (8) $\varepsilon = \beta l^2$. Acotemos $\| v_{\bar{x}} \|_0^2$ en la primera de dichas desigualdades mediante la segunda. Entonces,

$$\| v \|_C^2 \leqslant \alpha\beta l^3 \| v_{\bar{x}x} \|_0^2 + \frac{1}{l} [M\alpha (1 + 1/\beta) + 1 + 1/\alpha] \| v \|_0^2. \tag{20}$$

Sea que $\alpha\beta = \gamma$, $\beta = \gamma/2$. Poniendo

$$\alpha = \frac{\gamma^{1/3}}{1 + \gamma^{1/3}},$$

tendremos

$$M\alpha (1 + 1/\beta) + 1 + 1/\alpha =$$

$$= \frac{1 + \gamma^{1/3}}{\gamma^{1/3}} \left[1 + \frac{\gamma^{1/3}}{1 + \gamma^{1/3}} + M \frac{\gamma + \gamma^{2/3} + 1}{(1 + \gamma^{1/3})^3} \right] \leqslant M_1 (1 + \gamma^{-1/3}).$$

Haciendo $l^3\gamma = \varepsilon$ y teniendo en cuenta la acotación obtenida, hallamos que a base de (20) se deduce la desigualdad (18).

Demostremos ahora la desigualdad (19). Hagamos en la desigualdad (6) $\varepsilon = \alpha l$ y en (8) $\varepsilon = \beta l^2$. Acotado de nuevo $\| v_{\bar{x}} \|_0^2$ en la primera de las desigualdades mencionadas con auxilio de la segunda, resulta que

$$\| v_{\bar{x}} \|_C^2 \leqslant l (\alpha + \beta/\alpha + \beta) \| v_{\bar{x}x} \|_0^2 + \frac{M}{l^3} (1 + 1/\alpha) (1 + 1/\beta) \| v \|_0^2. \tag{21}$$

Introduzcamos la siguiente designación:

$$\alpha + \beta/\alpha + \beta = \gamma$$

y expresemos β a través de α y γ:

$$\beta^{-1} = \frac{1 + 1/\alpha}{\gamma - \alpha}.$$

Haciendo ahora, por ejemplo, $\alpha = \gamma/2$, tendremos la desigualdad

$$(1 + 1/\alpha)(1 + 1/\beta) = [1 + (2/\gamma)^3] \frac{1 + 2/\gamma + (2/\gamma)^2}{1 - 2/\gamma + (2/\gamma)^2} \leqslant 24 (1 + \gamma^{-3}).$$

Haciendo uso de esta desigualdad para acotar el coeficiente de $\| v \|_0^2$ en (21) y suponiendo que $\gamma l = \varepsilon$, obtendremos la desigualdad (19). El teorema está demostrado.

2. Teoremas de encajamiento para las funciones de red de dos argumentos. En este artículo estudiaremos las funciones de red preestablecidas en una red rectangular $\bar{\omega} = \bar{\omega} \times \bar{\omega}_2$ situada en un rectángulo $\bar{G} = \{x = (x_1, x_2) \mid 0 \leqslant x_\alpha \leqslant l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$. Sea $\omega = \omega_1 \times \omega_2$ el conjunto de los nodos interiores de la red $\bar{\omega}$ y $\gamma = \bar{\omega} \setminus \omega$ el conjunto de los nodos de frontera de la misma.

Para las funciones de red prefijadas en la red $\bar{\omega}$ introduzcamos las siguientes normas:

$$\|v\|_C = \max_{x \in \bar{\omega}} v(x), \qquad \|v\|_0^2 = \sum_{\bar{\omega}_1} \hbar_1 \sum_{\bar{\omega}_2} \hbar_2 v^2(x),$$

$$\|v_{\bar{x}_1}\|_0^2 = \sum_{\omega_1^+} h_1 \sum_{\bar{\omega}_2} \hbar_2 v_{\bar{x}_1}^2(x), \qquad \|v_{\bar{x}_2}\|_0^2 = \sum_{\bar{\omega}_1} \hbar_1 \sum_{\omega_1^+} h_2 v_{\bar{x}_2}^2(x),$$

$$\|\nabla v\|_0^2 = \|v_{\bar{x}_1}\|_0^2 + \|v_{\bar{x}_2}\|_0^2, \qquad \|v\|_1^2 = \|\nabla v\|_0^2 + \|v\|_0^2.$$

Sea

$$(u, v)_\gamma = \sum_\gamma u(x) v(x) \tau(x),$$

donde

$$\tau(x) = \begin{cases} h_\alpha(x_\alpha), \ x_\alpha \in \omega_\alpha, \ x_\beta = 0, \ l_\beta; \ \beta \neq \alpha, \\ [h_1(x_1) + h_2(x_2)]/2, \ x_\alpha = 0, \ l_\alpha; \ \alpha = 1, 2, \end{cases} \tag{22}$$

es la análoga de red del producto escalar de las trazas de las funciones $u(x)$ y $v(x)$ sobre la frontera, en tanto que

$$\|v\|_0^* = (v, v)_\gamma^{1/2}.$$

Para las funciones de red prefijadas sobre una red uniforme $\bar{\omega}$ y reducibles a cero en su frontera γ introduciremos la norma

$$\|v\|_{2,0}^2 = \sum_\omega h_1 h_2 (v_{\bar{x}_1 x_1}^2 + v_{\bar{x}_2 x_2}^2) + 2 \sum_{\omega_1^+} h_1 \sum_{\omega_2^+} h_2 v_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}^2.$$

TEOREMA 4. *Para cualquier función $v(x)$ dada sobre una red $\bar{\omega}$ no uniforme arbitraria es válida la desigualdad*

$$\|v\|_0^{*2} \leqslant \varepsilon \|\nabla v\|_0^2 + M_2(\varepsilon) \|v\|_0^2,$$

donde ε es una constante positiva arbitraria y

$$M_2(\varepsilon) = \frac{2(l_1 + l_2)}{l_1 l_2} + \frac{8}{\varepsilon}.$$

DEMOSTRACION. Con x_2 fijo arbitrario para la función $v(x)$, en virtud del teorema 2, es válida la desigualdad

$$v^2(0, x_2) + v^2(l_1, x_2) \leqslant 2\varepsilon_1 \sum_{\omega_1^+} v_{\bar{x}_1}^2(x) h_1 + 2(1/l_1 + 1/\varepsilon_1) \sum_{\bar{\omega}_1} v^2(x) \hbar_1$$

Multiplicando esta desigualdad por $\hbar_2(x_2)$ y sumando según $\overline{\omega}_2$ la correlación obtenida, tendremos

$$\sum_{\overline{\omega}_2} [v^2(0, x_2)\hbar_2 + v^2(l_1, x_2)\hbar_2] \leqslant 2\varepsilon_1 \| v_{\bar{x}_1} \|_0^2 + 2(1/l_1 + 1/\varepsilon_1)\| v \|_0^2.$$

De un modo análogo se demuestra la desigualdad

$$\sum_{\overline{\omega}_1} [v^2(x_1, 0)\hbar_1 + v^2(x_1, l_2)\hbar_1] \leqslant 2\varepsilon_1 \| v_{\bar{x}_2} \|_0^2 + 2(1/l_2 + 1/\varepsilon_1)\| v \|_0^2.$$

Sumando las dos últimas desigualdades y haciendo $2\varepsilon_1 = \varepsilon$, llegamos a la afirmación de dicho teorema.

TEOREMA 5. *Para cualquier función de red $v(x)$ prefijada sobre una red uniforme $\overline{\omega}$ y reducible a cero sobre la frontera γ, es justa la desigualdad*

$$\| v \|_C \leqslant M_3 \| v \|_{2,0},$$

donde

$$M_3^2 = \frac{1}{32}\left[\pi(l_1^2 + l_2^2) + \frac{2l_1^3 l_2^3}{(l_1^2 + l_2^2)^2}\right].$$

DEMOSTRACION. Sean $\mu_k(x)$ las funciones propias del operador laplaciano de red sobre una red $\overline{\omega}$, las cuales satisfacen las condiciones de frontera de primer género. Desarrollemos la función $v(x)$ en funciones $\mu_k(x)$:

$$v(x) = \sum_k v_k \mu_k(x), \qquad k = (k_1, k_2).$$

En virtud de (31) del § 3 las funciones $\mu_k(x)$ son acotadas uniformemente, y por eso

$$v^2(x) = \Big(\sum_k v_k \mu_k(x)\Big)^2 \leqslant \frac{4}{l_1 l_2}\Big(\sum_k |v_k|\Big)^2. \tag{23}$$

Acotemos el cuadrado de la suma que figura en el segundo miembro de la desigualdad (23):

$$\Big(\sum_k |v_k|\Big)^2 = \Big(\sum_k |v_k| \lambda_k \lambda_k^{-1}\Big)^2 \leqslant \sum_k v_k^2 \lambda_k^2 \sum_k \lambda_k^{-2}, \tag{24}$$

donde λ_k son los valores propios del operador laplaciano de red. Empleando la ortonormalización de las funciones propias $\mu_k(x)$ y la ortogonalidad de sus razones en diferencias finitas (véanse los problemas (30) del § 3 y (2) del § 3), hallamos que

$$\sum_k v_k^2 \lambda_k^2 = \sum_{k_1=1}^{N_1-1} \sum_{k_2=1}^{N_2-1} v_{k_1 k_2}^2 (\lambda_{k_1}^2 + 2\lambda_{k_1}\lambda_{k_2} + \lambda_{k_2}^2) =$$

$$= \| v_{\bar{x}_1 x_1} \|_0^2 + 2\| v_{\bar{x}_1 \bar{x}_2} \|_0^2 + \| v_{\bar{x}_2 x_2} \|_0^2 = \| v \|_{2,0}^2$$

De aquí y de las correlaciones (24) y (23) se deduce la acotación

$$\|v\|_C^2 \leqslant M \|v\|_{2,0}^2, \tag{25}$$

donde

$$M = \frac{4}{l_1 l_2} \sum_k \lambda_k^{-2}.$$

Acotemos la constante M. Dado que

$$\sum_k \lambda_k^{-2} = \lambda_1^{-2} + \sum_{\substack{k_1=1 \\ k_1+k_2>2,}}^{N_1-1} \sum_{k_2=1}^{N_2-1} \lambda_k^{-2},$$

entonces, en virtud de las fórmulas (31), (11) y (12) del § 3 tenemos

$$\sum_k \lambda_k^{-2} \leqslant \left(\frac{8}{l_1^2} + \frac{8}{l_2^2}\right)^{-2} + \sum_{\substack{k_1=1 \\ k_1+k_2>2}}^{N_1-1} \sum_{k_2=1}^{N_2-1} \left(\frac{4}{l_1^2} k_1^2 + \frac{4}{l_2^2} k_2^2\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left[\frac{l_1^2 l_2^2}{8(l_1^2 + l_2^2)}\right]^2 + \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\left(\frac{4}{l_1^2}\cos^2\varphi + \frac{4}{l_2^2}\operatorname{sen}^2\varphi\right)^2} \int_1^\infty \frac{dr}{r^3} =$$

$$= \left[\frac{l_1^2 l_2^2}{8(l_1^2 + l_2^2)}\right]^2 + \frac{\pi l_1 l_2 (l_1^2 + l_2^2)}{2^7},$$

puesto que *)

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^2\varphi\, d\varphi}{(a^2\cos^2\varphi + b^2\operatorname{sen}^2\varphi)^2} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{(a^2\operatorname{sen}^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)^2} = \frac{\pi}{4ab^3}.$$

Con la sustitución de esta acotación en la (25) se afirmará el teorema 5.

§ 5. Acotaciones de abajo para algunos operadores

En el § 2 de este capítulo, al estudiar los modelos unidimensionales, en una u otra etapa de investigación tropezábamos con la necesidad de tener acotaciones del tipo

$$[y, y] \geqslant M \|y\|_0^2, \quad M = \text{const} > 0, \tag{1}$$

donde $[u, v] \equiv (\Lambda u, v)_\omega$ o $[u, v] \equiv (\overline{\Lambda} u, v)_{\overline{\omega}}$, a su vez Λ y $\overline{\Lambda}$ son las aproximaciones de los correspondientes operadores diferenciales y de

*) Véase, por ejemplo, la fórmula 3.642.3 en el libro de Gradshtéin I. S. y Rizhik I. M., Tablas de integrales, sumas, series y productos, M., «Naúka», 1971 (Градштейн И. С., Рыжик И. М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, М., «Наука», 1971.)

las condiciones de frontera para éstos. Todos los operadores, estudiados en el § 2, eran autoconjugados en sentido de los productos escalares correspondientes, mientras que para los operadores autoconjugados es válida la acotación

$$\lambda_{\text{mín}}(v, v) \leqslant (Av, v),$$

donde $\lambda_{\text{mín}}$ es el valor propio mínimo del operador, es decir,

$$\lambda_{\text{mín}} = \text{mín}\, \lambda(A).$$

De aquí se desprende que la desigualdad (1) establece la acotación de abajo para el valor propio mínimo del operador de red correspondiente.

En este párrafo se establecerán las acotaciones (1) para algunos operadores de red que son válidos para funciones de red de uno o dos argumentos. Para no repetir razonamientos de un mismo tipo, formularemos las afirmaciones a demostrar no en términos de los operadores, sino en términos de las formas cuadráticas $[v, v]$, las cuales están relacionadas del modo evidente con los operadores que acotamos.

1. Funciones de red de un argumento. Consideraremos las funciones de red dadas sobre una red $\overline{\omega}$ situada en un segmento $[0, l]$.

LEMA 1 (desigualdad de Friedrichs). *Para cualquier función de red $v(x)$ dada en una red uniforme $\overline{\omega}$ con paso h y reducible a cero cuando $x = 0$ ó $x = l$, es justa la desigualdad*

$$\|v_{\bar{x}}\|_0^2 \geqslant M_1 \|v\|_0^2, \quad \text{donde} \quad M_1 = \left[\frac{2 \operatorname{sen}(\pi h/(2l))}{h}\right]^2. \tag{2}$$

DEMOSTRACION. En virtud de la fórmula en diferencias de Green (12) del § 1 es válida la siguiente correlación:

$$\|v_{\bar{x}}\|_0^2 = -(v_{\bar{x}x}, v)_\omega.$$

De esta manera, para obtener la desigualdad (2) es suficiente acotar el operador de la segunda razón en diferencias con las condiciones de frontera de primer género. En el § 3 fue analizado el correspondiente problema de hallar valores propios y fue mostrado, en particular, que el valor propio mínimo de dicho problema es igual a M_1. De aquí se desprende la desigualdad (2). El lema queda demostrado.

OBSERVACION 1. La desigualdad (2) con la constante M_1 es exacta en el sentido de que llega a ser igualdad, si a título de $v(x)$ se toma la primera función propia del problema (2) del § 3.

OBSERVACION 2. La constante M_1 en la desigualdad (2) depende del paso h, no obstante en virtud de la correlación (12) del § 3 puede acotarse de abajo mediante una magnitud que no depende de h. A saber, cuando $h \leqslant l/2$, tiene lugar la acotación $M_1 \geqslant 8/l^2$.

OBSERVACION 3. La desigualdad (2) permanece en vigor también en el caso de una red no uniforme arbitraria, si la constante M_1 se pone igual a $8/l^2$ (véase el lema 2).

OBSERVACION 4. La desigualdad (2) es justa asimismo para las funciones reducibles a cero sólo en uno de los extremos, o sea, cuando $x = 0$ o cuando $x = l$, pero con la condición de que la constante es algo mayor (véase la observación 2 al lema 2).

OBSERVACION 5. Si $v(x)$ es una función de red arbitraria en $\bar{\omega}$, para ésta la desigualdad (2), por lo común, no tiene lugar. De ejemplo puede servir la función $v(x) = \text{const}$, siendo $x \in \bar{\omega}$, para la cual el primer miembro en la desigualdad (2) se reduce a cero. Las analogías de la desigualdad (2) para las funciones arbitrarias se van a establecer en los lemas 2 y 3.

LEMA 2. *Para cualquier función de red $v(x)$ dada en una red no uniforme arbitraria $\bar{\omega}$ es válida la desigualdad*

$$\| v_{\bar{x}} \|_0^2 + \varkappa_0 v^2(0) + \varkappa_1 v^2(l) \geqslant M_2 \| v \|_0^2, \tag{3}$$

donde $\varkappa_0$ y $\varkappa_1$ son constantes no negativas, cuya suma es positiva, y

$$M_2 = \frac{8(\varkappa_0 + \varkappa_1 + l\varkappa_0\varkappa_1)^2}{l(2 + l\varkappa_0)(2 + l\varkappa_1)(2\varkappa_0 + 2\varkappa_1 + l\varkappa_0\varkappa_1)}. \tag{4}$$

Si $v(0) = v(l) = 0$, la desigualdad (3) toma la forma

$$\| v_{\bar{x}} \|_0^2 \geqslant \frac{8}{l^2} \| v \|_0^2. \tag{5}$$

Aclaremos la idea de la demostración en un ejemplo de las funciones de argumento continuo. Para cualquier función lisa $v(x)$ tiene lugar la identidad

$$v(x) = v(0) + \int_0^x v'(\xi)\, d\xi.$$

Elevando al cuadrado esta identidad y acotando el segundo miembro con auxilio de la desigualdad de Cauchy — Buniakovsky y de la desigualdad ε (16) del § 1, tendremos

$$v^2(x) \leqslant (1 + \varepsilon_0) v^2(0) + (1 + 1/\varepsilon_0)\, x \int_0^x v'^2(\xi)\, d\xi.$$

Sea $x \leqslant y \leqslant l$. En tal caso

$$v^2(x) \leqslant (1 + \varepsilon_0) v^2(0) + (1 + 1/\varepsilon_0)\, x \int_0^y v'^2(\xi)\, d\xi.$$

Integrando esta desigualdad con respecto a x de 0 a y, resulta que

$$\int_0^y v^2(x)\,dx \leqslant (1+\varepsilon_0)\,y v^2(0) + (1+1/\varepsilon_0)\frac{y^2}{2}\int_0^y v'^2(\xi)\,d\xi.$$

Análogamente se demuestra la desigualdad

$$\int_0^l v^2(x)\,dx \leqslant (1+\varepsilon_1)(l-y)\,v^2(l) + (1+1/\varepsilon_1)\frac{(l-y)^2}{2}\int_y^l v'^2(\xi)\,d\xi.$$

Escojamos ahora $y \in [0, l]$ tal que los coeficientes de las integrales en ambas desigualdades sean iguales. Esto ocurre cuando $y = y_0$, donde

$$y_0 = \frac{l\sqrt{1+1/\varepsilon_1}}{\sqrt{1+1/\varepsilon_0}+\sqrt{1+1/\varepsilon_1}}.$$

Sumando las desigualdades señaladas anteriormente, para este valor de y, tendremos

$$\int_0^l v^2(x)\,dx \leqslant \frac{l(1+\varepsilon_0)\sqrt{1+1/\varepsilon_1}}{\sqrt{1+1/\varepsilon_0}+\sqrt{1+1/\varepsilon_1}}\,v^2(0) +$$

$$+\, l\,\frac{(1+\varepsilon_1)\sqrt{1+1/\varepsilon_0}}{\sqrt{1+1/\varepsilon_0}+\sqrt{1+1/\varepsilon_1}}\,v^2(l) +$$

$$+\,\frac{l^2}{2}\,\frac{(1+1/\varepsilon_0)(1+1/\varepsilon_1)}{(\sqrt{1+1/\varepsilon_0}+\sqrt{1+1/\varepsilon_1})^2}\int_0^l v'^2(x)\,dx.$$

DEMOSTRACION DEL LEMA. Realicemos ahora dicha idea para una función de red $v(x)$ dada en $\bar{\omega}$. Dado que el punto $y = y_0$ puede no pertenecer a la red $\bar{\omega}$, tenemos que complicar algo los razonamientos.

Para cualquier función de red $v(x) = v_i$ tiene lugar la identidad

$$v_i = v_0 + \sum_{j=1}^{i} v_{\bar{x},j} h_j.$$

Elevando al cuadrado el primero y el segundo miembros de esta identidad y acotando el segundo miembro mediante la desigualdad de Cauchy (15) del § 1 y la desigualdad ε (16) del § 1, tendremos

$$v_i^2 \leqslant (1+\varepsilon_0)\,v_0^2 + (1+1/\varepsilon_0)\,x_i \sum_{j=1}^{i} v_{\bar{x},j}^2 h_j. \qquad (6)$$

Sea $x_h \in \bar{\omega}$. Entonces, para $x_i \leqslant x_{h-1}$ a base de la correlación (6) hallamos que

$$v_i^2 \leqslant (1+\varepsilon_0)\,v_0^2 + (1+1/\varepsilon_0)\,x_i \sum_{j=1}^{h} v_{\bar{x},j} h_j.$$

Multipliquemos esta desigualdad por $\hbar_j$ y sumemos según i de 0 a $k-1$. Señalando que

$$\sum_{j=0}^{k-1} x_j\hbar_j = \sum_{j=1}^{k-1} x_j \frac{x_{j+1}-x_{j-1}}{2} = \frac{x_k x_{k-1}}{2},$$

tendremos

$$\sum_{j=0}^{k-1} v_j^2\hbar_j \leqslant (1+\varepsilon_0)\left(x_k - \frac{h_k}{2}\right) v_0^2 + (1+1/\varepsilon_0)\frac{x_k x_{k-1}}{2} \sum_{j=1}^{k} v_{\bar{x},\,j}^2 h_j. \qquad (7)$$

Haciendo ahora en la desigualdad (6) $i=k$, multipliquémosla por $\varepsilon\hbar_k$, donde $0\leqslant\varepsilon\leqslant 1$, y sumemos a (7):

$$\sum_{j=0}^{k-1} v_j^2\hbar_j + \varepsilon v_k^2\hbar_k \leqslant (1+\varepsilon_0)\left(x_k - \frac{h_k}{2} + \varepsilon\hbar_k\right) v_0^2 +$$

$$+ (1+1/\varepsilon_0)\frac{x_k (x_{k-1}+2\varepsilon\hbar_k)}{2} \sum_{j=1}^{k} v_{\bar{x},\,k}^2 h_k. \qquad (8)$$

Hagamos

$$\eta = x_k - \frac{h_k}{2} + \varepsilon\hbar_k = x_k - (1-\varepsilon)\frac{h_k}{2} + \varepsilon\frac{h_{k+1}}{2} \qquad (9)$$

y señalemos que, cuando $x\in\bar{\omega}$ y $\varepsilon\in[0,\,1]$, η puede tomar cualesquiera valores de $[0,\,l]$. Es fácil comprobar que

$$x_k (x_{k-1}+2\varepsilon\hbar_k) = x_k^2 + x_k(-(1-\varepsilon)h_k + \varepsilon h_{k+1}) \leqslant \eta^2.$$

Tomando en consideración esta circunstancia, a base de la correlación (8) obtendremos la desigualdad

$$\sum_{j=0}^{k-1} v_j^2\hbar_j + \varepsilon v_k^2\hbar_k \leqslant (1+\varepsilon_0)\,\eta v_0^2 + (1+1/\varepsilon_0)\frac{\eta^2}{2}\sum_{j=1}^{k} v_{\bar{x},\,j}^2 h. \qquad (10)$$

A partir de la identidad

$$v_l = v_N - \sum_{j=l+1}^{N} v_{\bar{x},\,j} h_j$$

empleando razonamientos análogos a los aducidos anteriormente, se demuestra la desigualdad

$$\sum_{j=k+1}^{N} v_j^2\hbar_j + (1-\varepsilon) v_k^2\hbar_k \leqslant (1+\varepsilon_1)(l-\eta) v_N^2 +$$

$$+ (1+1/\varepsilon_1)\frac{(l-\eta)^2}{2}\sum_{j=k+1}^{N} v_{\bar{x},\,j}^2 h_j \qquad (11)$$

Tomando ahora en las desigualdades (10) y (11)

$$\eta = \frac{l\sqrt{1+1/\varepsilon_1}}{\sqrt{1+1/\varepsilon_0}+\sqrt{1+1/\varepsilon_1}}$$

y sumándolas, después de unas transformaciones obtenemos

$$\|v_{\bar{x}}\|_0^2 + \frac{2\varepsilon_0}{l}\left(1+\sqrt{\frac{1+1/\varepsilon_0}{1+1/\varepsilon_1}}\right)v^2(0) +$$
$$+\frac{2\varepsilon_1}{l}\left(1+\sqrt{\frac{1+1/\varepsilon_1}{1+1/\varepsilon_0}}\right)v^2(l) \geqslant \frac{2\left(\sqrt{1+1/\varepsilon_0}+\sqrt{1+1/\varepsilon_1}\right)^2}{l^2(1+1/\varepsilon_0)(1+1/\varepsilon_1)}\|v\|_0^2.$$

Nos resta expresar ε_0 y ε_1 a través de $\varkappa_0$ y $\varkappa_1$. Hallaremos estas expresiones suponiendo que el coeficiente de $v^2(0)$ es igual a $\varkappa_0$ y el coeficiente de $v^2(l)$, igual a $\varkappa_1$, es decir,

$$\sqrt{\frac{1+1/\varepsilon_0}{1+1/\varepsilon_1}} = \frac{l\varkappa_0}{2\varepsilon_0}-1 \equiv \frac{\bar{\varkappa}_0}{\varepsilon_0}-1,$$
$$\sqrt{\frac{1+1/\varepsilon_1}{1+1/\varepsilon_0}} = \frac{l\varkappa_1}{2\varepsilon_1}-1 \equiv \frac{\bar{\varkappa}_1}{\varepsilon_1}-1, \qquad (12)$$

donde

$$\bar{\varkappa}_0 = l\varkappa_0/2, \qquad \bar{\varkappa}_1 = l\varkappa_1/2.$$

A base de las fórmulas (12) hallamos que

$$\frac{\bar{\varkappa}_0}{\varepsilon_0}-1 = \left(\frac{\bar{\varkappa}_1}{\varepsilon_1}-1\right)^{-1}, \quad \text{es decir,} \quad \frac{1}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\bar{\varkappa}_0}+\frac{1}{\bar{\varkappa}_0}\left(\frac{\bar{\varkappa}_1}{\varepsilon_1}-1\right)^{-1}. \qquad (13)$$

Poniendo el valor de ε_0^{-1} en la segunda de las ecuaciones (12) y elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad, después de unas transformaciones resulta la ecuación para ε_1

$$(1+1/\bar{\varkappa}_0)\,\bar{\varkappa}_1^2/\varepsilon_1 = 2\bar{\varkappa}_1 + \bar{\varkappa}_1/\bar{\varkappa}_0 + 1.$$

De aquí

$$\varepsilon_1 = \frac{\bar{\varkappa}_1^2(\bar{\varkappa}_0+1)}{2\bar{\varkappa}_0\bar{\varkappa}_1+\bar{\varkappa}_0+\bar{\varkappa}_1}.$$

Sustituyendo este valor de ε_1 en (13), hallamos que

$$\varepsilon_0 = \frac{\bar{\varkappa}_0^2(\bar{\varkappa}_1+1)}{2\bar{\varkappa}_0\bar{\varkappa}_1+\bar{\varkappa}_0+\bar{\varkappa}_1}.$$

Expresemos mediante $\varkappa_0$ y $\varkappa_1$ la constante

$$M_2 = \frac{2\left(\sqrt{1+1/\varepsilon_0}+\sqrt{1+1/\varepsilon_1}\right)^2}{l^2(1+1/\varepsilon_0)(1+1/\varepsilon_1)}.$$

De las fórmulas (12) se deduce que

$$\frac{\bar{\varkappa}_0}{\varepsilon_0}=\frac{\sqrt{1+1/\varepsilon_0}+\sqrt{1+1/\varepsilon_1}}{\sqrt{1+1/\varepsilon_0}}, \quad \frac{\bar{\varkappa}_1}{\varepsilon_1}=\frac{\sqrt{1+1/\varepsilon_0}+\sqrt{1+1/\varepsilon_1}}{\sqrt{1+1/\varepsilon_1}}$$

y por lo tanto

$$M_2=\frac{1}{l^2}\,2\bar{\varkappa}_0\bar{\varkappa}_1/\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_1(1+\varepsilon_0)(1+\varepsilon_1)}.$$

Poniendo aquí los valores de ε_0 y ε_1, hallamos que

$$M_2=\frac{8(\varkappa_0+\varkappa_1+l\varkappa_0\varkappa_1)^2}{l(2+l\varkappa_0)(2+l\varkappa_1)(2\varkappa_0+2\varkappa_1+l\varkappa_0\varkappa_1)}.$$

La desigualdad (3) queda demostrada.

La desigualdad (5) resulta partiendo de (3), si en la última se toma $v(0)=v(l)=0$ y en (4) se pasa al límite cuando $\varkappa_0\to\infty$ y $\varkappa_1\to\infty$. El lema queda demostrado.

OBSERVACION 1. Supongamos que la función de red $v(x)$ se anula en uno de los extremos del segmento $[0, l]$, por ejemplo, cuando $x=0$. Entonces, en la fórmula (4) se puede pasar al límite cuando $\varkappa_0\to\infty$

$$\|v_{\bar{x}}\|_0^2+\varkappa_1 v^2(l)\geqslant M_3\|v\|_0^2, \quad \text{donde} \quad M_3=\frac{8}{l^2}\left(\frac{1+l\varkappa_1}{2+l\varkappa_1}\right)^2. \qquad (14)$$

OBSERVACION 2. Con las mismas suposiciones puede obtenerse también para $\|v_{\bar{x}}\|_0^2$ una acotación de abajo, expresada por medio de $\|v\|_0^2$. Con este fin en (14) debe hacerse $\varkappa_1=0$:

$$\|v_{\bar{x}}\|_0^2\geqslant\frac{2}{l^2}\|v\|_0^2. \qquad (15)$$

OBSERVACION 3. Si en la desigualdad (3), por ejemplo, $\varkappa_0$ se toma igual a cero, la acotación adquiere la forma

$$\|v_{\bar{x}}\|_0^2+\varkappa_1 v^2(l)\geqslant M_4\|v\|_0^2, \quad \text{donde} \quad M_4=\frac{2\varkappa_1}{l(2+l\varkappa_1)}. \qquad (16)$$

Lema 3 (desigualdad de Poincaré). *Para cualquier función de red $v(x)$ dada en una red no uniforme arbitraria $\bar{\omega}$ es válida la desigualdad*

$$\|v_{\bar{x}}\|_0^2\geqslant\frac{4}{l^2}\|v\|_0^2-\frac{4}{l}(v, 1)_{\omega}^2. \qquad (17)$$

DEMOSTRACION. Sean x_i y x_k dos nodos cualesquiera de la red $\bar{\omega}$. Debido a que, cuando $x_i<x_k$, se cumple la correlación

$$(v_i-v_k)^2=\Big(\sum_{j=i+1}^{k}v_{\bar{x},\,j}h_j\Big)^2\leqslant(x_k-x_i)\sum_{j=i+1}^{k}v_{\bar{x},\,j}^2\hbar_j,$$

y, cuando $x_i>x_k$, se cumple la correlación

$$(v_i-v_k)^2=\Big(\sum_{j=k+1}^{i}v_{\bar{x},\,j}h_j\Big)^2\leqslant(x_i-x_k)\sum_{j=k+1}^{i}v_{\bar{x},\,j}^2\hbar_j,$$

siempre es válida la desigualdad

$$(v_i - v_k)^2 \leqslant |x_i - x_k| \, \| v_{\bar{x}} \|_0^2.$$

Multipliquemos esta desigualdad por $\hbar_i$ y sumemos según i de 0 a N. Después de unas transformaciones resulta

$$\| v \|_0^2 + l v_k^2 - 2 v_k (v, 1)_{\bar{\omega}} \leqslant \frac{l^2}{2} \| v_{\bar{x}} \|_0^2,$$

puesto que

$$\sum_{i=0}^{N} |x_i - x_k| \hbar_i = \int_0^l |t - x_k| \, dt = \int_0^{x_k} (x_k - t) \, dt + \int_{x_k}^{l} (t - x_k) \, dt =$$

$$= \frac{l^2}{2} - (l - x_k) x_k \leqslant \frac{l^2}{2}.$$

Multiplicando ahora la última desigualdad por $\hbar_k$ y sumando según k de 0 a N, hallamos que

$$2l \| v \|_0^2 - 2 (v, 1)_{\bar{\omega}}^2 \leqslant \frac{l^3}{2} \| v_{\bar{x}} \|_0^2,$$

de donde se deduce la desigualdad (17). El lema queda d mostrado.

LEMA 4. *Sea la red no uniforme $\bar{\omega}$ tal que*

$$\sum_{\bar{\omega} \cap [a, b]} \hbar(x) \geqslant m, \tag{18}$$

donde $[a, b] \subset [0, l]$. Entonces, para cualquier función de red $v(x)$ dada en la red $\bar{\omega}$ es justa la desigualdad

$$\| v_{\bar{x}} \|_0^2 + \mu \sum_{\bar{\omega} \cap [a, b]} v^2 \hbar \geqslant M_5 \| v \|_0^2, \tag{19}$$

donde $M_5 = \dfrac{2m\mu}{(2 + lm\mu) l}$ *y* $\mu = \text{const} > 0$.

DEMOSTRACIÓN. Cuando $x_i \leqslant x_k$ se cumple la correlación

$$v_i^2 = \Big(v_k - \sum_{j=i+1}^{k} v_{\bar{x}, j} h_j\Big)^2 \leqslant (1 + \varepsilon) v_k^2 + (1 + 1/\varepsilon) \Big(\sum_{j=i+1}^{k} v_{x, j} h_j \Big)^2 \leqslant$$

$$\leqslant (1 + \varepsilon) v_k^2 + (1 + 1/\varepsilon) |x_i - x_k| \, \| v_x \|_0^2.$$

Es fácil comprobar que la desigualdad que acabamos de escribir permanece válida también cuando $x_i \geqslant x_k$. Por lo tanto multipliquémosla por $\hbar_i$ y sumemos según i de 0 a N:

$$\| v \|_0^2 \leqslant l (1 + \varepsilon) v_k^2 + (1 + 1/\varepsilon) \| v_{\bar{x}} \|_0^2 (|x_k - x_i|, 1) \leqslant$$

$$\leqslant l (1 + \varepsilon) v_k^2 + (1 + 1/\varepsilon) \frac{l^2}{2} \| v_{\bar{x}} \|_0^2.$$

La desigualdad que acabamos de obtener multipliquémosla por $\hbar_k$ y sumemos según $x_k \in \bar{\omega} \cap [a, b]$. Resulta

$$\sum_{\bar{\omega}\cap[a,b]} \hbar \|v\|_0^2 \leqslant l(1+\varepsilon) \sum_{\bar{\omega}\cap[a,b]} v^2(x)\,\hbar + (1+1/\varepsilon)\frac{l^2}{2} \sum_{\bar{\omega}\cap[a,b]} \hbar \|v_{\bar{x}}\|_0^2.$$

Empleando ahora la condición (18) y tomando $\varepsilon = \mu l m/2$, obtenemos la desigualdad (19). El lema queda demostrado.

LEMA 5. *Para cualquier función de red $v(x)$ dada en una red uniforme $\bar{\omega}$ con el paso h y reducible a cero cuando $x = 0$ ó $x = l$, es justa la desigualdad*

$$\|v_{\bar{x}x}\|_0^2 \geqslant M_6 \|v\|_0^2, \quad M_6 = \left[\frac{2\,\mathrm{sen}\,(\pi h/2l)}{h}\right]. \tag{20}$$

DEMOSTRACIÓN. En virtud de la desigualdad (9) del § 4 con cualquiera que sea $\varepsilon > 0$ es justa la acotación

$$\|v_{\bar{x}x}\|_0^2 \geqslant \frac{1}{\varepsilon}\|v_{\bar{x}}\|_0^2 - \frac{1}{4\varepsilon^2}\|v\|_0^2,$$

a la vez que en virtud del lema 1

$$\|v_{\bar{x}}\|_0^2 \geqslant M_1 \|v\|_0^2, \quad \text{donde} \quad M_1 = \left[\frac{2\,\mathrm{sen}\,(\pi h/(2l))}{h}\right]^2.$$

Acotando $\|v_{\bar{x}}\|_0^2$ en la primera de dichas desigualdades con auxilio de la segunda, tendremos

$$\|v_{\bar{x}x}\|_0^2 \geqslant \left(\frac{M_1}{\varepsilon} - \frac{1}{4\varepsilon^2}\right)\|v\|_0^2.$$

Escojamos ε tal que el coeficiente de $\|v\|_0^2$ sea máximo: $\varepsilon = 1/(2M_1)$. Sustituyendo este valor de ε en la última desigualdad, llegamos a la (20). El lema está demostrado.

LEMA 6. *Para cualquier función de red $v(x)$, dada en una red uniforme $\bar{\omega}$ el paso h y ruducible a cero cuando $x = 0$ y cuando $x = h$, es valida la desigualdad*

$$\|v_{\bar{x}x}\|_0^2 \geqslant \frac{12}{l^4}\|v\|_0^2.$$

DEMOSTRACIÓN. Teniendo en cuenta que $v(0) = 0$, escribamos la fórmula

$$v_i = \sum_{j=1}^{i} h v_{\bar{x},j} = \sum_{j=1}^{i} h x_{\bar{x},j} v_{\bar{x},j}$$

y transformémosla mediante la fórmula (11) del § 1, tomando en la última $m = 0$, $n = i$, $a \equiv 1$, $u \equiv v$, $v \equiv x$:

$$v_i = x_i v_{\bar{x},i} - \sum_{j=1}^{i-1} x_j v_{\bar{x}x,j} h.$$

Tomando en consideración que $v_{\bar{x}}(h) = 0$, hallamos

$$v_{\bar{x},\,i} = \sum_{j=1}^{i-1} v_{\bar{x}x,\,j} h.$$

Sustituyendo esta correlación en la anterior, tendremos

$$v_i = \sum_{j=1}^{i-1} (x_i - x_j)\, v_{\bar{x}x,\,j} h.$$

De aquí hallamos que

$$\| v \|_0^2 = \sum_{j=2}^{N-1} h \left\{ \sum_{j=1}^{i-1} (x_i - x_j)\, v_{\bar{x}x,\,j} h \right\}^2 + \frac{h}{2} \left\{ \sum_{j=1}^{N-1} h\,(x_N - x_j)_{\bar{x}x,\,j} \right\}^2.$$

Acotemos las sumas que figuran en el segundo miembro de la correlación que acabamos de obtener. Empleando la desigualdad de Cauchy (15) del § 1, hallamos que para cualquier $i = 2, \ldots, N - 1$ se cumple la desigualdad

$$\left\{ \sum_{j=1}^{i-1} (x_i - x_j)\, v_{\bar{x}x,\,j} h \right\}^2 \leqslant \sum_{j=1}^{i-1} (x_i - x_j)^2\, h\, \| v_{\bar{x}x,\,j} \|_0^2.$$

Tomando en consideración esta acotación, a base de la última identidad resulta la desigualdad

$$\| v \|_0^2 \leqslant M \| v_{\bar{x}x} \|_0^2,$$

donde

$$M = \sum_{j=1}^{N-1} h \left\{ \sum_{j=1}^{i-1} h\,(x_i - x_j)^2 + \frac{h}{2}\,(x_N - x_i)^2 \right\}.$$

Los cálculos muestran que

$$M = \frac{h^4}{12} N\,(N - 1)\,(N^2 - N + 1) < \frac{l^4}{12},$$

de donde se deduce la afirmación del lema.

2. **Funciones de red de dos argumentos.** Aquí estudiaremos las funciones de red dadas en la red rectangular $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2$ situada en el rectángulo

$$\bar{G} = \{ x = (x_1, x_2) \mid 0 \leqslant x_\alpha \leqslant l_\alpha,\ \alpha = 1, 2 \}.$$

Emplearemos las designaciones introducidas en el p. 2 del § 4.

LEMA 7 (desigualdad de Friedrichs). *Para cualquier función de red $v(x)$ indicada sobre una red no uniforme rectangular arbitraria $\bar{\omega}$ y reducible a cero en una frontera γ es válida la desigualdad*

$$\| \nabla v \|_0^2 \geqslant (8/l_1^2 + 8/l_2^2)\, \| v \|_0^2. \tag{21}$$

DEMOSTRACIÓN. Para la función $v(x) = v(x_1, x_2)$, siendo fijo x_2, en virtud de la desigualdad (5) es válida la correlación

$$\sum_{x_1 \in \omega_1^+} (v_{\bar{x}}(x_1, x_2))\, h_1(x_1) \geqslant \frac{8}{l_1} \sum_{x_1 \in \bar{\omega}_1} v^2(x_1, x_2)\, \hbar(x_1).$$

Multiplicando esta desigualdad por $h_2(x_2)$ y sumando según $x_2 \in \bar{\omega}_2$, obtendremos

$$\| v_{\bar{x}_1} \|_0^2 \geqslant (8/l_1^2) \| v \|_0^2.$$

Análogamente hallamos que

$$\| v_{\bar{x}_2} \|_0^2 \geqslant (8/l_2^2) \| v \|_0^2.$$

Sumando las dos últimas correlaciones, resulta la desigualdad (21). El lema queda demostrado.

LEMA 8 (desigualdad de Poincaré). *Para cualquier función de red $v(x)$ prefijada sobre una red no uniforme rectangular arbitraria $\bar{\omega}$ es justa la desigualdad*

$$\| \nabla v \|_0^2 \geqslant \frac{4}{l_1^2 + l_2^2} \| v \|_0^2 - \frac{4}{l_1 l_2 (l_1^2 + l_2^2)} (v, 1)_{\bar{\omega}}^2. \qquad (22)$$

DEMOSTRACIÓN. Sean $x_i = (x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)})$ y $x_j = (x_1^{(j_1)}, x_2^{(j_2)})$ dos nodos cualesquiera de la red $\bar{\omega}$. Para una función $v(x)$ cualquiera que sea es válida la identidad *)

$$[v_i - v_j]^2 = [\operatorname{sign}(i_1 - j_1) \sum_{k_1 = m_1 + 1}^{n_1} h_1 v_{\bar{x}_1, k_1, i_2} +$$
$$+ \operatorname{sign}(i_2 - j_2) \sum_{k_2 = m_2 + 1}^{n_2} h_2 v_{\bar{x}_2, j_1, k_2}],$$

donde

$$m_\alpha = \min\{i_\alpha, j_\alpha\}, \quad n_\alpha = \max\{i_\alpha, j_\alpha\}, \quad \alpha = 1, 2.$$

De aquí en virtud de la desigualdad-ε (16) del § 1 y la desigualdad de Cauchy (15) del § 1 hallamos que

$$[v(x) - v(y)]^2 \leqslant (1 + \varepsilon)\, | x_1 - y_1 | \sum_{x_1 \in \omega_1^+} h_1 v_{\bar{x}_1}^2 (x_1, x_2) +$$
$$+ (1 + 1/\varepsilon)\, | x_2 - y_2 | \sum_{x_2 \in \omega_2^+} h_2 v_{\bar{x}_2}^2 (y_1, x_2). \qquad (23)$$

---

*) Esta forma la adquiere la siguiente correlación, muy evidente para las funciones de un argumento continuo,

$$[v(x) - v(y)]^2 = \left[\int_{y_1}^{x_1} \frac{\partial v(\xi_1, x_2)}{\partial \xi_1}\, d\xi_1 + \int^{x_2} \frac{\partial v(y_1, \xi_2)}{\partial \xi_2}\, d\xi_2 \right]^2$$

Multipliquemos esta desigualdad por $\hbar_1(x_1)\,\hbar_2(x_2)\,\hbar_1(y_1)\,\hbar_2(y_2)$ y sumemos según $x \in \bar{\omega}$ e $y \in \bar{\omega}$. Dado que

$$\sum_{x_\alpha \in \bar{\omega}_\alpha} |y_\alpha - x_\alpha|\,\hbar_\alpha \leqslant l_\alpha^2/2, \tag{24}$$

entonces,

$$2l_1l_2\,\|v\|_0^2 - 2\,(v,\ 1)_{\bar{\omega}}^2 \leqslant (1+\varepsilon)\,\frac{l_1^3 l_2}{2}\,\|v_{\bar{x}_1}\|_0^2 + (1+1/\varepsilon)\,\frac{l_1 l_2^3}{2}\,\|v_{\bar{x}_2}\|_0^2.$$

Escogiendo ahora $\varepsilon = (l_2/l_1)^2$, obtenemos la desigualdad (22). Hemos demostrado el lema.

LEMA 9. *Sea $\tilde{\omega} \subset \bar{\omega}$ un conjunto determinado de los nodos de la red $\bar{\omega}$, además*

$$\sum_{\tilde{\omega}} \hbar_1\hbar_2 \geqslant m. \tag{25}$$

Entonces, para cualquier función $v(x)$ dada en la red $\bar{\omega}$, es válida la desigualdad

$$\|\nabla v\|_0^2 + \mu \sum_{\tilde{\omega}} v^2\hbar_1\hbar_2 \geqslant M_7\,\|v\|_0^2, \tag{26}$$

donde $\mu = \text{const} > 0$ *es constante a la vez que*

$$M_7 = \frac{2m\mu}{l_1l_2\,[2+\mu\,(l_1^2+l_2^2)]}\,.$$

DEMOSTRACIÓN. Sean $x = (x_1,\ x_2)$ e $y = (y_1,\ y_2)$ dos nodos arbitrarios de la red $\bar{\omega}$. Para la función $v(x)$ es justa la desigualdad

$$[v(x) - v(y)]^2 \geqslant (1-\varepsilon_1)\,v^2(x) - (1/\varepsilon_1 - 1)\,v^2(y),$$

de donde, basándonos en (23), hallamos que

$$(1-\varepsilon_1)\,v^2(x) \leqslant (1/\varepsilon_1 - 1)\,v^2(y) + (1+\varepsilon_2)\,|x_1 - y_1| \sum_{\omega_1^+} v_{\bar{x}_1}^2(x_1,\ x_2)\,h_1 +$$
$$+ (1+1/\varepsilon_2)\,|x_2 - y_2| \sum_{\omega_1^+} v_{\bar{x}_1}^2(y_1,\ x_2)\,h_2.$$

Multipliquemos esta desigualdad por $\hbar_1\hbar_2$ y sumemos según $x \in \bar{\omega}$. Atendiendo la acotación (24), obtenemos:

$$(1-\varepsilon_1)\,\|v\|_0^2 \leqslant l_1l_2\,(1/\varepsilon_1 - 1)\,v^2(y) + (1+\varepsilon_2)\,\frac{l_1^2}{2}\,\|v_{\bar{x}_1}\|_0^2 +$$
$$+ (1+1/\varepsilon_1)\,\frac{l_1 l_2^2}{2} \sum_{\omega_2^+} v_{\bar{x}_1}^2(y_1,\ x_2)\,h_2. \tag{27}$$

Multipliquemos esta desigualdad por $\hbar_1\hbar_2$ y sumemos según $y \in \tilde{\omega}$. Después de unas acotaciones hallemos que

$$(1-\varepsilon_1)\sum_{\tilde{\omega}}\hbar_1\hbar_2\|v\|_0^2 \leqslant (1/\varepsilon_1-1)\,l_1l_2\sum_{\tilde{\omega}}v^2\hbar_1\hbar_2 + \\ +(1+\varepsilon_2)\frac{l_1^3l_2}{2}\|v_{\bar{x}_1}\|_0^2+(1+1/\varepsilon_2)\frac{l_1l_2^3}{2}\|v_{\bar{x}_2}\|_0^2.$$

Tomando $\varepsilon_2 = (l_2/l_1)^2$, tendremos la acotación

$$(1-\varepsilon_1)\sum_{\tilde{\omega}}\hbar_1\hbar_2\|v\|_0^2 \leqslant (1/\varepsilon_1-1)\,l_1l_2\sum_{\tilde{\omega}}v^2\hbar_1\hbar_2 + \frac{l_1l_2(l_1^2+l_2^2)}{2}\|\nabla v\|_0^2.$$

Escogiendo aquí ε_1 a partir de la condición $(1/\varepsilon_1 - 1) = \mu\,(l_1^2 + l_2^2)/2$ y teniendo en cuenta la condición (25), obtendremos la acotación (26). El lema queda demostrado.

LEMA 10. *Sea $\tilde{\gamma} \subset \gamma$ un conjunto determinado de los nodos de la frontera a la vez que la red no uniforme $\bar{\omega}$ es tal que*

$$\sum_{\tilde{\gamma}}\tau(x) \geqslant m, \tag{28}$$

donde $\tau(x)$ se preestablece por la correlación (22) del § 4. En tal caso para cualquier función $v(x)$ dada en la red $\bar{\omega}$ es justa la desigualdad

$$\|\nabla v\|_0^2 + \mu\sum_{\tilde{\gamma}}v^2\tau \geqslant M_8\|v\|_0^2, \tag{29}$$

donde

$$M_8 = \frac{m\mu}{l_1l_2+\mu\,(l_1^2+l_2^2)\,(l_1+l_2)},$$

mientras que μ es una constante positiva arbitraria. Si, en particular, $v(x) = 0$, siendo $x \in \tilde{\gamma}$, entonces, para la función $v(x)$ es válida la desigualdad

$$\|\nabla v\|_0^2 \geqslant \frac{m}{(l_1+l_2)\,(l_1^2+l_2^2)}\|v\|_0^2. \tag{30}$$

DEMOSTRACION. Para la función $v(x)$ es válida la desigualdad (27). A la par con la desigualdad (27) para $v(x)$ es justa también la desigualdad, que se demuestra análogamente,

$$(1-\varepsilon_1)\|v\|_0^2 \leqslant l_1l_2(1/\varepsilon_1-1)\,v^2(y) + \\ +(1+\varepsilon_2)\frac{l_1^2l_2}{2}\sum_{\omega_1^+}v_{\bar{x}_1}^2(x_1, y_2)+(1+1/\varepsilon_2)\frac{l_2^2}{2}\|v_{\bar{x}_2}\|_0^2. \tag{31}$$

Sea $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}^{(1)} \cup \tilde{\gamma}^{(2)}$, donde $\tilde{\gamma}^{(\alpha)}$ es un conjunto γ de los nodos situados sobre la recta $x_\alpha = 0$ ó $x_\alpha = l_\alpha$. Multipliquemos (27) por $\hbar_1(y_1)$ y

sumemos el resultado según $\widetilde{\gamma}^{(2)}$. Tendremos la desigualdad

$$(1-\varepsilon_1) \sum_{y_1 \in \widetilde{\gamma}^{(2)}} \hbar_1 (y_1) \| v \|_0^2 \leqslant l_1 l_2 (1/\varepsilon_1 - 1) \sum_{y_1 \in \widetilde{\gamma}^{(2)}} v^2 (y) \hbar_1 + \\ + (1+\varepsilon_2) l_1^3 \| v_{\bar{x}_1} \|_0^2 + (1+1/\varepsilon_2) l_1 l_2^2 \| v_{\bar{x}_2} \|_0^2.$$

Multiplicando ambos miembros de la correlación (31) por $\hbar_2 (y_2)$ y sumando el resultado, que acabamos de obtener según $\widetilde{\gamma}^{(1)}$, llegamos a la desigualdad

$$(1-\varepsilon_1) \sum_{y_2 \in \widetilde{\gamma}^{(1)}} \hbar_2 y_2 \| v \|_0^2 \leqslant l_1 l_2 (1/\varepsilon_1 - 1) \sum_{y_2 \in \widetilde{\gamma}^{(1)}} \hbar_2 v^2 (y) + \\ + (1+\varepsilon_2) l_1^2 l_2 \| v_{\bar{x}_1} \|_0^2 + (1/\varepsilon_2 + 1) l_2^3 \| v_{\bar{x}_2} \|_0^2.$$

Sumando las dos últimas desigualdades, hallaremos

$$(1-\varepsilon_1) \sum_{\widetilde{\gamma}} \tau \| v \|_0^2 \leqslant l_1 l_2 (1/\varepsilon_1 - 1) \sum_{\widetilde{\gamma}} v^2 (x) \tau + \\ + (1+\varepsilon_2) l_1^2 (l_1 + l_2) \| v_{\bar{x}_1} \|_0^2 + (1+1/\varepsilon_2) l_2^2 (l_1 + l_2) \| v_{\bar{x}_2} \|_0^2.$$

Tomando ahora $\varepsilon_2 = (l_2/l_1)^2$, obtenemos

$$(1-\varepsilon_1) \sum_{\widetilde{\gamma}} \tau \| v \|_0^2 \leqslant l_1 l_2 (1/\varepsilon_1 - 1) \sum_{\widetilde{\gamma}} v^2 (x) \tau (x) + \\ + (l_1^2 + l_2^2)(l_1 + l_2) \| \nabla v \|_0^2. \qquad (32)$$

Escogiendo ε_1 a partir de la condición

$$l_1 l_2 (1/\varepsilon_1 - 1) = \mu (l_1 + l_2)(l_1^2 + l_2^2)$$

y tomando en consideración la condición (28), obtendremos la acotación (29).

Supongamos ahora que $v(x) = 0$, siendo $x \in \widetilde{\gamma}$. Entonces, el primer término del segundo miembro de la desigualdad (32) se elimina. Puesto que ε_1 es un número no negativo arbitrario, tomando en tal caso $\varepsilon_1 = 0$ y teniendo presente (28), nos resulta la desigualdad (30). El lema queda demostrado.

CAPÍTULO VI

ACOTACIONES APRIORÍSTICAS

En el capítulo IV fueron aducidos ejemplos de la construcción de las aproximaciones en diferencias para una amplia clase de problemas de la Física Matemática. Una vez construido el esquema en diferencias e investigado su error de aproximación, surge la cuestión acerca de la acotación de la velocidad de convergencia de la solución del problema de red a la solución del problema que se aproxima. Como ya se ha mencionado, la acotación de la velocidad de convergencia de un esquema en diferencias puede deducirse de la acotación apriorística hecha para este esquema. El presente capítulo es el que se dedica a la obtención de las acotaciones apriorísticas para algunos de los esquemas en diferencias finitas construidos en el cap. IV. Las acotaciones apriorísticas que citamos tienen, en lo fundamental, el carácter ilustrativo y no abarcan ni mucho menos todos los problemas incluso de la cantidad de los estudiados en el cap. IV. No obstante los problemas que estudiamos aquí son típicos en aquel aspecto de que los métodos expuestos de obtención de las acotaciones apriorísticas para éstos permiten obtener acotaciones análogas para una clase de problemas esencialmente más amplia.

En este capítulo se exponen dos métodos de obtención de las acotaciones apriorísticas: el método de las desigualdades energéticas y el método a base de la función de Green. El tercer método de obtención de las acotaciones apriorísticas, empleado vastamente en la práctica, se funda sobre el principio del máximo y está expuesto en el cap. III. Los ejemplos que ilustran la aplicación del método de las desigualdades energéticas al obtener las acotaciones apriorísticas para los modelos unidimensionales de las ecuaciones en diferencias de segundo y cuarto órdenes, se aducen en el § 2 del cap .V.

§ 1. Método de las desigualdades energéticas

En este párrafo se expone el método de las desigualdades energéticas de obtención de las acotaciones apriorísticas para los problemas en diferencias. Los problemas que estudiamos se presuponen dados en una red uniforme rectangular $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2$. Se examinan el esquema en diferencias que aproxima el primer problema de contorno para la ecuación de segundo orden con derivadas mixtas, los esquemas en diferencias de cuarto orden de aproximación para la ecuación de Poisson y para la ecuación con derivadas mixtas (los coeficientes son constantes), los esquemas en diferencias que aproximan el segundo y el tercer problemas de contorno para la ecuación de segundo orden que no tiene derivadas mixtas.

1. Introducción. Introduzcamos dos nuevas normas de funciones de red, las cuales se van a emplear en este párrafo para obtener acotaciones apriorísticas,

$$\|\varphi\|_{-1} = \sup_{v|_\gamma=0} \frac{|(\varphi, v)_\omega|}{\|v\|_1}, \quad \|\varphi\|_{-\bar{1}} = \sup_{v\neq 0} \frac{|(\varphi, v)_{\bar{\omega}}|}{\|v\|_1}.$$

Las otras normas utilizadas en este párrafo, fueron introducidas en el § 4 del cap. V.

Establezcamos una afirmación auxiliar. Tiene lugar el

LEMA 1. *Para cualquier función de red $v(x)$ dada en una red uniforme $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2$ es válida la desigualdad*

$$\|v_{\bar{x}_\alpha}\|_0^2 \leqslant \frac{4}{h_\alpha^2}\|v\|_0^2, \qquad \alpha = 1, 2.$$

DEMOSTRACION. Realicemos la demostración, por ejemplo, para el caso de $\alpha = 1$. Según la definición

$$\|v_{\bar{x}_1}\|_0^2 = (v_{\bar{x}_1}, v_{\bar{x}_1})_{\omega_1^+\times\bar{\omega}_2} = \frac{1}{h_1^2}(v - v^{(-1_1)}, v - v^{(-1_1)})_{\omega_1^+\times\bar{\omega}_2}.$$

Multiplicando término a término y empleando la desigualdad de Cauchy, obtendremos que

$$\|v_{\bar{x}_1}\|_0^2 \leqslant \frac{2}{h_1^2}(v^2, 1)_{\omega_1^+\times\bar{\omega}_2} + \frac{2}{h_1^2}(v^2, 1)_{+\omega_1\times\bar{\omega}_2} = \frac{4}{h_1^2}\|v\|_0^2.$$

2. Problema de Dirichlet para una ecuación autoconjugada de segundo orden con derivadas mixtas. Analicemos el siguiente problema. En el rectángulo $D = \{x = (x_1, x_2) \mid 0 < x_\alpha < l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$ hallar la solución de la ecuación

$$Lu = \sum_{\alpha, \beta=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_{\alpha\beta}(x)\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right) - q(x)u = -f(x), \qquad x \in D, \qquad (1)$$

que en la frontera Γ del dominio D verifica la condición

$$u(x) = g(x), \quad x \in \Gamma. \tag{2}$$

Tendremos presente que para todos $x \in \bar{D} = D \cup \Gamma$ la matriz $\{k_{\alpha\beta}(x)\}$ es simétrica, positivamente definida y tiene elementos acotados, es decir, para todos $x \in \bar{D}$

$$c_1(\xi_1^2 + \xi_2^2) \leqslant \sum_{\alpha, \beta=1}^{2} k_{\alpha\beta}(x)\,\xi_\alpha \xi_\beta \leqslant c_2(\xi_1^2 + \xi_2^2), \tag{3}$$
$$c_1 = \text{const} > 0, \quad c_2 = \text{const} > 0.$$

Además, supondremos que

$$q(x) \geqslant 0, \qquad x \in D. \tag{4}$$

Introduzcamos en $\bar{D}$ una red uniforme rectangular $\bar{\omega}$. Para el operador L en el cap. IV hemos construido la aproximación en diferencias, la cual utilizaremos al construir el esquema en diferencias para el problema (1), (2). A saber, sea que

$$\Lambda y = -\varphi(x), \quad x \in \omega, \quad y = g(x), \quad x \in \gamma, \tag{5}$$

donde

$$\Lambda y = \frac{1}{2}(\Lambda^- + \Lambda^+)\,y - dy,$$
$$\Lambda^- y = \sum_{\alpha, \beta=1}^{2} (k_{\alpha\beta}(x)\, y_{\bar{x}_\beta})_{x_\alpha},$$
$$\Lambda^+ y = \sum_{\alpha, \beta=1}^{2} (k_{\alpha\beta}(x)\, y_{x_\beta})_{\bar{x}_\alpha},$$
$$\varphi(x) = f(x), \quad d(x) = q(x), \quad x \in \omega.$$

Investiguemos el problema (5).

TEOREMA 1. *La solución del problema* (5) *existe y es única. Para la solución del problema* (5) *con las condiciones de contorno homogéneas* ($g \equiv 0$) *es justa la acotación apriorística*

$$\|y\|_1 \leqslant \frac{1}{c_1}\left[1 + \frac{l_1^2 l_2^2}{8(l_1^2 + l_2^2)}\right] \|\varphi\|_{-1}.$$

DEMOSTRACION. Sea $v(x)$ una función de red dada sobre la red $\bar{\omega}$ y $v(x) = 0$, siendo $x \in \gamma$. Entonces valiéndonos de la fórmulas de adición por partes (9) del § 1 del cap. V, hallamos que

$$(\Lambda^- v, v)_\omega = \sum_{\alpha, \beta=1}^{2} ((k_{\alpha\beta}(x)\, v_{\bar{x}_\beta})_{x_\alpha}, v)_\omega = -\sum_{\alpha, \beta=1}^{2} (k_{\alpha\beta}(x)\, v_{\bar{x}_\beta}, v_{\bar{x}_\alpha})_{\omega_1 \times \omega_2}.$$

De aquí en virtud de la condición (3) se desprende que

$$c_1 \|\nabla v\|_0^2 \leqslant -(\Lambda^- v, v)_\omega.$$

Asimismo se demuestra la desigualdad

$$c_1 \| \nabla v \|_0^2 \leqslant -(\Lambda^+ v, v)_\omega.$$

Agrupando estas desigualdades y tomando en consideración las condiciones (4), resulta que

$$c_1 \| \nabla v \|_0^2 \leqslant -(\Lambda v, v)_\omega. \tag{6}$$

A base de (6) y en virtud del lema (7) del § 5 del cap. V hallamos que

$$\| v \|_1^2 \leqslant -\frac{1}{c_1}\left[1 + \frac{l_1^2 l_2^2}{8(l_1^2 + l_2^2)}\right](\Lambda v, v)_\omega. \tag{7}$$

De aquí se deduce que, si $\Lambda v \equiv 0$ cuando $x \in \omega$, en tal caso también $v \equiv 0$ cuando $x \in \omega$. De esta forma, hemos demostrado que el problema homogéneo (5) tiene sólo una solución trivial $v(x) \equiv 0$, y por consiguiente la solución del problema heterogéneo (3) existe con cualesquiera que sean φ y g y esta solución es única.

Hallemos ahora la acotación apriorística de la solución del problema (5) a condición de que $g(x) \equiv 0$, $x \in \gamma$. Con este fin representemos en (7) $v = y$ y tengamos en cuenta que $\Lambda y = -\varphi$. Tendremos

$$\| y \|_1^2 \leqslant \frac{1}{c_1}\left[1 + \frac{l_1^2 l_2^2}{8(l_1^2 + l_2^2)}\right](\varphi, y)_\omega. \tag{8}$$

Como

$$|(\varphi, y)_\omega| \leqslant \| \varphi \|_{-1} \| y \|_1,$$

entonces, a base de (8) se deduce la acotación apriorística buscada. El teorema queda demostrado.

3. Esquemas en diferencias de elevado orden de aproximación. Analicemos el problema de Dirichlet para la ecuación de Poisson en un rectángulo D:

$$\Delta u = -f(x), \ x \in D; \ u = g(x), \ x \in \Gamma. \tag{9}$$

Para la ecuación (9) en el cap. III sobre una red uniforme rectangular ω fue construida una aproximación en diferencias, la cual tiene el error $O(|h|^4)$ en las soluciones lisas de la ecuación (9). Valiéndonos de esta aproximación, construyamos el esquema en diferencias para el problema (9) del siguiente modo:

$$\Lambda' y = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2} = -\varphi(x), \ x \in \omega, \tag{10}$$

$$y(x) = g(x) \quad \text{cuando} \quad x \in \gamma,$$

donde

$$\varphi = f + \frac{h_1^2}{12}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{h_2^2}{12}\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}.$$

Para el problema (10) bajo la condición de que

$$1/\sqrt{5} \leqslant h_1/h_2 \leqslant \sqrt{5}$$

fue demostrada una solubilidad unívoca y se obtuvo la acotación apriorística (21) del § 4 del cap. III en la métrica C. Aquí demostraremos la solubilidad del problema (10) sin restricciones algunas en lo que se refiere a la red $\bar{\omega}$.

TEOREMA 2. *La solución del problema (10) existe en una red uniforme $\bar{\omega}$ cualquiera. Esta solución es única y, cuando $g(x) \equiv 0$, tiene las acotaciones apriorísticas:*

$$\|y\|_1 \leqslant \frac{3}{2}\left(1+\frac{l_1^2 l_2^2}{8(l_1^2+l_2^2)}\right)\|\varphi\|_{-1} \tag{11}$$

$$\|y\|_{2,0} \leqslant \frac{3}{2}\|\varphi\|_0, \tag{12}$$

$$\|y\|_C \leqslant M\|\varphi\|_0, \quad M=\text{const}>0. \tag{13}$$

DEMOSTRACION: Sea $v(x)$ una función de red dada sobre la red $\bar{\omega}$ e igual a cero en la frontera: $v(x)=0$, siendo $x \in \gamma$.

En tal caso

$$(\Lambda' v, v)_\omega = (v_{\bar{x}_1 x_1}, v)_\omega + (v_{\bar{x}_2 x_2}, v)_\omega + \frac{h_1^2+h_2^2}{12}(v_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2}, v)_\omega =$$
$$= -(v_{\bar{x}_1}, v_{\bar{x}_1})_{\omega_1^+\times\omega_2} - (v_{\bar{x}_2}, v_{\bar{x}_2})_{\omega_1\times\omega_2^+} +$$
$$+\frac{h_1^2+h_2^2}{12}(v_{\bar{x}_1\bar{x}_2}, v_{\bar{x}_1\bar{x}_2})_{\omega_1^+\times\omega_2^+} = -\|\nabla v\|_0^2 + \frac{h_1^2+h_2^2}{12}\|v_{\bar{x}_1\bar{x}_2}\|_0^2.$$

En virtud del lema 1

$$\|v_{x_1\bar{x}_2}\|_0^2 \leqslant \frac{4}{h_1^2}\|v_{\bar{x}_2}\|_0^2, \quad \|v_{\bar{x}_1\bar{x}_2}\|_0^2 \leqslant \frac{4}{h_2^2}\|v_{\bar{x}_1}\|_0^2$$

y, por consiguiente,

$$(\Lambda' v, v)_\omega \leqslant -\frac{2}{3}\|\nabla v\|_0^2.$$

Basándose en el lema 7 del § 5 del cap. V, de aquí se desprende que

$$\|v\|_1^2 \leqslant -\frac{3}{2}\left(1+\frac{l_1^2 l_2^2}{8(l_1^2+l_2^2)}\right)(\Lambda' v, v)_\omega. \tag{14}$$

Por lo tanto, si $\Lambda' v = 0$ cuando $x \in \omega$, entonces, también $v(x) \equiv 0$ cuando $x \in \omega$, De aquí se deduce que el problema (10) tiene una solución única, cualesquiera que sean φ y g. La acotación apriorística (11) se sigue de (14) del modo evidente.

Ahora examinemos la correlación

$$(\Lambda' v, v_{\bar{x}_1 x_1} + v_{\bar{x}_2 x_2})_\omega = (v_{\bar{x}_1 x_1} + v_{\bar{x}_2 x_2}, v_{\bar{x}_1 x_1} + v_{\bar{x}_2 x_2})_\omega +$$
$$+\frac{h_1^2+h_2^2}{12}\{(v_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2}, v_{\bar{x}_1 x_1})_\omega + (v_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2}, v_{\bar{x}_2 x_2})_\omega\} =$$
$$= \|v_{\bar{x}_1 x_1}\|_0^2 + \|v_{\bar{x}_2 x_2}\|_0^2 + 2\|v_{\bar{x}_1\bar{x}_2}\|_0^2 - \frac{h_1^2+h_2^2}{12}(\|v_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2}\|_0^2 +$$
$$+\|v_{\bar{x}_1\bar{x}_2 x_2}\|_0^2). \tag{15}$$

Debido al lema 1 son válidas las correlaciones

$$\| v_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2} \|_0^2 + \| v_{\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_2} \|_0^2 \leqslant \frac{4}{h_1^2} \| v_{\bar{x}_1 \bar{x}_2} \|_0^2 + \| v_{\bar{x}_2 x_2} \|_0^2,$$
$$\| v_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2})_0^2 + \| v_{\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_2} \|_0^2 \leqslant \frac{4}{h_2^2} \| v_{\bar{x}_1 x_1} \|_0^2 + \| v_{\bar{x}_1 \bar{x}_2} \|_0^2. \tag{16}$$

Poniendo las desigualdades (16) en la correlación (15), obtendremos

$$(\Lambda' v,\ v_{\bar{x}_1 x_1} + v_{\bar{x}_2 x_2})_\omega \geqslant \frac{2}{3} (\| v_{\bar{x}_1 x_1} \|_0^2 + \| v_{\bar{x}_2 x_2} \|_0^2 + 2 \| v_{\bar{x}_1 \bar{x}_2} \|_0^2).$$

Si $v = y$, basándonos en el esquema (10), tenemos:

$$\| y_{\bar{x}_1 x_1} \|_0^2 + \| y_{\bar{x}_2 x_2} \|_0^2 + 2 \| y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2} \|_0^2 \leqslant \frac{3}{2} | (\varphi,\ y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2})_\omega | \leqslant$$
$$\leqslant \frac{3}{2} \| \varphi \|_0 \| y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} \|_0^2.$$

Pero

$$\| y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} \|_0^2 = \| y_{\bar{x}_1 x_1} \|_0^2 + \| y_{\bar{x}_2 x_2} \|_0^2 + 2 \| y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2} \|_0^2 \equiv \| y \|_{2,0}^2$$

y, por consiguiente

$$\| y \|_{2,0} \leqslant \frac{3}{2} \| \varphi \|_0.$$

La desigualdad (13) se deduce de la acotación (12) en virtud del teorema 5 del § 4 del cap. V. El teorema se ha demostrado.

Examinemos el problema de Dirichlet para la ecuación de segundo orden de coeficientes constantes y con derivada mixta:

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + 2\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = -f(x), \quad x \in D, \quad |\alpha| < 1,$$
$$u(x) = g(x), \quad x \in \Gamma. \tag{17}$$

Siendo $|\alpha| < 1$, la ecuación (17) se hace elíptica. En el cap. IV en una red cuadriculada ω con paso h para la ecuación (17) fue construido el esquema en diferencias el cual aproxima dicha ecuación en soluciones lisas con el error $O(|h|^4)$. Haciendo uso de este esquema, planteemos el problema en diferencias, el cual aproxima el problema (17), del siguiente modo:

$$\Lambda' y = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} + \alpha (y_{\bar{x}_1 x_2} + y_{x_1 \bar{x}_2}) +$$
$$+ h^2 \frac{1 + 3\alpha + 2\alpha^2}{6} y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2} = -\varphi(x), \quad x \in \omega, \tag{18}$$
$$y = g, \quad \text{siendo} \quad x \in \gamma,$$

donde

$$\varphi = f(x) + \frac{h^2}{12} Lf.$$

Investiguemos el problema (18).

TEOREMA 3. *La solución del problema* (18) *existe y es única. Para la solución del problema* (18), *siendo* $g \equiv 0$, *son válidas las acotaciones*:

$$\| y \|_1 \leqslant \frac{3}{2(1-|\alpha|)} \left(1+\frac{l_1^2 l_2^2}{8(l_1^2+l_2^2)}\right) \| \varphi \|_{-1}, \tag{19}$$

$$\| y \|_{2,0} \leqslant \frac{3}{2(1-|\alpha|)} \| \varphi \|_0, \tag{20}$$

$$\| y \|_C \leqslant M \| \varphi \|_0, \quad M = \text{const} > 0. \tag{21}$$

DEMOSTRACION. Transformemos el operador Λ'. Primeramente señalemos que

$$h^2 y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2} = y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2} + y_{x_1 x_2} - y_{x_1 \bar{x}_2} - y_{\bar{x}_1 x_2}. \tag{22}$$

Es conveniente transformar el operador Λ' de modo que el coeficiente de $\frac{h^2}{6} y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2}$ sea la expresión

$$1-3|\alpha|+2\alpha^2. \tag{23}$$

Teniendo presente la fórmula (22), escribamos

$$\begin{aligned}\Lambda' y = {} & y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} + \alpha (y_{\bar{x}_1 x_2} + y_{x_1 \bar{x}_2}) + \\ & + \frac{\alpha+|\alpha|}{2} (y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2} + y_{x_1 x_2} - y_{\bar{x}_1 x_2} - y_{x_1 \bar{x}_2}) + \\ & + \frac{h^2}{2} (1-3|\alpha|+2\alpha^2) y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2} = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} + \\ & + \frac{\alpha-|\alpha|}{2} (y_{\bar{x}_1 x_2} + y_{x_1 \bar{x}_2}) + \frac{\alpha+|\alpha|}{2} (y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2} + y_{x_1 x_2}) + \\ & + \frac{h^2}{6} (1-3|\alpha|+2\alpha^2) y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2} = \\ = {} & \frac{1}{2} (1-\operatorname{sign}\alpha) \Lambda^- y + \frac{1}{2} (1+\operatorname{sign}\alpha) \Lambda^+ y + \\ & + \frac{h^2}{6} (1-3|\alpha|+2\alpha^2) y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2},\end{aligned} \tag{24}$$

donde

$$\Lambda^- y = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} + \alpha (y_{\bar{x}_1 x_2} + y_{x_1 \bar{x}_2}),$$
$$\Lambda^+ y = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} + \alpha (y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2} + y_{x_1 x_2}).$$

Sea $v(x)$ una función de red dada en la red $\bar{\omega}$ y sea que $v(x) = 0$ cuando $x \in \gamma$. En virtud de la condición de que $|\alpha| < 1$ tenemos

$$\begin{aligned}(\Lambda^- v, v)_\omega = {} & -(v_{\bar{x}_1}, v_{\bar{x}_1})_{\omega_1^+ \times \omega_2} - (v_{\bar{x}_2}, v_{\bar{x}_2})_{\omega_1 \times \omega_2^+} - \\ & - \alpha (v_{\bar{x}_1}, v_{\bar{x}_2})_{\omega_1^+ \times \omega_2^+} - \alpha (v_{\bar{x}_1}, v_{\bar{x}_2})_{\omega_1^+ \times \omega_2^+} \leqslant -(1-|\alpha|) \| \nabla v \|_0^2.\end{aligned} \tag{25}$$

Análogamente se demuestra que

$$(\Lambda^+ v, v)_\omega \leqslant -(1-|\alpha|)\|\nabla v\|_0^2. \qquad (26)$$

A la fuerza del lema 1

$$h^2(v_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2}, v)_\omega = h^2(v_{\bar{x}_1\bar{x}_2}, v_{\bar{x}_1\bar{x}_2})_{\omega_1^+\times\omega_2^+} \leqslant 2\|\nabla v\|_0^2. \qquad (27)$$

Observemos que la función (23) es no positiva cuando $0{,}5 \leqslant |\alpha| < 1$ y positiva, cuando $0 \leqslant |\alpha| < 0{,}5$. Por lo tanto cuando $0{,}5 \leqslant |\alpha| < 1$ a base de las correlaciones (24) — (27) hallamos que

$$-(\Lambda' v, v)_\omega \geqslant (1-|\alpha|)\|\nabla v\|_0^2. \qquad (28)$$

Cuando $0 \leqslant |\alpha| < 0{,}5$,

$$-(\Lambda' v, v)_\omega \geqslant \left(1-|\alpha|-\frac{1-3|\alpha|+2\alpha^2}{3}\right)\|\nabla v\|_0^2. \qquad (29)$$

Agrupando (28) y (29), para todos $|\alpha| < 1$ tendremos

$$\frac{2}{3}(1-|\alpha|)\|\nabla v\|_0^2 < -(\Lambda' v, v)_\omega. \qquad (30)$$

Partiendo de la desigualdad (30) en virtud del lema 7 del § 5 del cap. V, hallamos que

$$\|v\|_1^2 \leqslant -\frac{3}{2}\left\{\left(1+\frac{l_1^2 l_2^2}{8(l_1^2+l_2^2)}\right)\Big/(1-|\alpha|)\right\}(\Lambda' v, v)_\omega. \qquad (31)$$

Si $\Lambda' v = 0$ cuando $x \in \omega$, entonces de (31) se desprende que $v(x) \equiv 0$ si $x \in \omega$. De esta manera, hemos demostrado que la solución del problema (18) existe y es única. La acotación apriorística (19) se deduce de la desigualdad (31) del modo evidente.

Demostremos la validez de la acotación apriorística (20). En virtud de la condición $|\alpha| < 1$ obtenemos

$$(v_{\bar{x}_1 x_1}+v_{\bar{x}_2 x_2}+2\alpha v_{\bar{x}_1 x_2}, v_{\bar{x}_1 x_1})_\omega = (v_{\bar{x}_1 x_1}+2\alpha v_{\bar{x}_1 x_2}, v_{\bar{x}_1 x_1})_\omega + \|v_{\bar{x}_1 x_2}\|_0^2 \geqslant$$
$$\geqslant (1-|\alpha|)(\|v_{\bar{x}_1 x_1}\|_0^2+\|v_{\bar{x}_1\bar{x}_2}\|_0^2). \qquad (32)$$

Del modo análogo hallamos que

$$(v_{\bar{x}_1 x_1}+v_{\bar{x}_2 x_2}+2\alpha v_{\bar{x}_1 x_2}, v_{\bar{x}_2 x_2})_\omega \geqslant (1-|\alpha|)(\|v_{\bar{x}_2 x_2}\|_0^2+\|v_{\bar{x}_1\bar{x}_2}\|_0^2). \qquad (33)$$

Agrupando (32) y (33), obtenemos

$$(v_{\bar{x}_1 x_1}+v_{\bar{x}_2 x_2}+2\alpha v_{\bar{x}_1 x_2}, v_{\bar{x}_1 x_1}+v_{\bar{x}_2 x_2})_\omega \geqslant$$
$$\geqslant (1-|\alpha|)(\|v_{\bar{x}_1 x_1}\|_0^2+\|v_{\bar{x}_2 x_2}\|_0^2+2\|v_{\bar{x}_1\bar{x}_2}\|_0^2). \qquad (34)$$

Asimismo se demuestra la desigualdad

$$(v_{\bar{x}_1 x_1}+v_{\bar{x}_2 x_2}+2\alpha v_{x_1\bar{x}_2}, v_{\bar{x}_1 x_1}+v_{\bar{x}_2 x_2})_\omega \geqslant$$
$$\geqslant (1-|\alpha|)(\|v_{\bar{x}_1 x_1}\|_0^2+\|v_{\bar{x}_2 x_2}\|_0^2+2\|v_{\bar{x}_1\bar{x}_2}\|_0^2). \qquad (35)$$

Sumando las desigualdades (34) y (35) y dividiendo en 2 el resultado, obtenemos

$$(\Lambda^- v, v_{\bar{x}_1x_1}+v_{\bar{x}_2x_2})_\omega \geqslant (1-|\alpha|)(\|v_{\bar{x}_1x_1}\|_0^2+\|v_{\bar{x}_2x_2}\|_0^2+2\|v_{\bar{x}_1\bar{x}_2}\|_0^2). \quad (36)$$

Del modo sumamente análogo hallamos que

$$(\Lambda^+ v, v_{\bar{x}_1x_1}+v_{\bar{x}_2x_2})_\omega \geqslant (1-|\alpha|)(\|v_{\bar{x}_1x_1}\|_0^2+\|v_{\bar{x}_2x_2}\|_0^2+2\|v_{\bar{x}_1\bar{x}_2}\|_0^2). \quad (37)$$

Luego en virtud del lema 1

$$h^2(v_{\bar{x}_1x_1\bar{x}_2x_2}, v_{\bar{x}_1x_1}+v_{\bar{x}_2x_2})_\omega = -h^2(\|v_{\bar{x}_1x_1\bar{x}_2}\|_0^2+\|v_{\bar{x}_1\bar{x}_2x_2}\|_0^2) \geqslant$$
$$\geqslant -2(\|v_{\bar{x}_1x_1}\|_0^2+\|v_{\bar{x}_2x_2}\|_0^2+2\|v_{\bar{x}_1\bar{x}_2}\|_0^2). \quad (38)$$

Igual que al demostrar la desigualdad (30), hallamos que

$$\|v_{\bar{x}_1x_1}\|_0^2+2\|v_{\bar{x}_1\bar{x}_2}\|_0^2+\|v_{\bar{x}_2x_2}\|_0^2 \leqslant \frac{3}{2}\,\frac{1}{1-|\alpha|}(\Lambda' v, v_{\bar{x}_1x_1}+v_{\bar{x}_2x_2})_\omega. \quad (39)$$

Haciendo $v(x)=y(x)$ en (39), obtenemos del modo corriente la acotación (20). La acotación (21) se deduce de la acotación (20) en virtud del teorema 5 del § 4 del cap. V.

3. El tercer problema de contorno para una ecuación autoconjugada de segundo orden sin derivadas mixtas dada en un rectángulo. Analicemos el problema

$$Lu=\sum_{\alpha=1}^{2} L_\alpha u=-f(x), \qquad x\in D, \quad (40)$$

$$\frac{\partial u}{\partial N}=\varkappa(s)\,u-g(s), \qquad s\in\Gamma, \quad (41)$$

donde $\partial/\partial N$ es el operador de la derivada con respecto a la conormal interior a la frontera Γ, es decir,

$$\frac{\partial u}{\partial N}=\begin{cases} k_\alpha(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_\alpha}, & x_\alpha=0,\\[2mm] -k_\alpha(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_\alpha}, & x_\alpha=l_\alpha,\ \alpha=1,2,\end{cases}$$

s es la longitud del arco de la frontera Γ medida a partir del punto con las coordenadas (0, 0) en el sentido antihorario,

$$L_\alpha u=\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)-q_\alpha(x)\,u.$$

Supondremos que los coeficientes del problema (40), (41) satisfacen las condiciones

$$k_\alpha(x)\geqslant c_1>0, \quad q_\alpha(x)\geqslant 0, \quad \varkappa(s)\geqslant 0. \quad (42)$$

Tomemos

$$\overline{\Lambda}_\alpha y = \begin{cases} \Lambda_\alpha y = (a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha} - d_\alpha y, & x_\alpha \in \omega_\alpha, \\ \Lambda_{\bar{\alpha}}^- y = \frac{2}{h_\alpha}\left[a_\alpha^{(+1\alpha)} y_{x_\alpha} - \left(\varkappa_{-\alpha} + \frac{1}{2} h_\alpha d_\alpha\right) y \right], & x_\alpha = 0, \\ \Lambda_\alpha^+ y = \frac{2}{h_\alpha}\left[- a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha} - \left(\varkappa_{+\alpha} + \frac{1}{2} h_\alpha d_\alpha\right) y \right], & x_\alpha = l_\alpha. \end{cases}$$

Entonces, la aproximación en diferencias del problema (40), (41) puede escribirse en la forma

$$\overline{\Lambda} y = -\Phi(x), \quad x \in \overline{\omega}, \tag{43}$$

donde

$$\overline{\Lambda} = \overline{\Lambda}_1 + \overline{\Lambda}_2, \quad \Phi(x) = \varphi(x) + \delta(\gamma)\, g(x),$$

en tanto que $\delta(\gamma)$ es la análoga de la función delta concentrada en la frontera, es decir, $(v, \delta(\gamma))_{\overline{\omega}} = (v, 1)_\gamma$.

TEOREMA 4. *Si para una función $v(x)$ cualquiera dada en la red $\overline{\omega}$ se cumple uniformemente con respecto a $|h|$ la correlación*

$$-(\overline{\Lambda} v, v)_{\overline{\omega}} \geqslant c\, \|v\|_1^2, \quad c = \text{const} > 0. \tag{44}$$

en tal caso existe una solución única del problema (43), *para la cual es válida la acotación apriorística*

$$\|y\|_1^2 \leqslant M\left(\|\varphi\|_{-1}^2 + \|g\|_0'^2\right), \quad M = \text{const} > 0. \tag{45}$$

DEMOSTRACION. De las correlaciones (43) y (44) se desprende que, si $\Phi(x) \equiv 0$ cuando $x \in \overline{\omega}$, también $v(x) \equiv 0$ cuando $x \in \overline{\omega}$. Por lo tanto la solución del problema (43) existe y es única.

Multipliquemos por y la aproximación (43) como escalar

$$-(\overline{\Lambda} y, y)_{\overline{\omega}} = (\Phi, y)_{\overline{\omega}} \equiv (\varphi, y)_{\overline{\omega}} + (g, y)_\gamma. \tag{46}$$

Por definición de la norma $\|\cdot\|_{-1}$ y de la desigualdad ε (16) del § 1 del cap. V resulta

$$|(\varphi, y)_{\overline{\omega}}| \leqslant \|\varphi\|_{-1} \|y\|_1 \leqslant \varepsilon \|y\|_1^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|\varphi\|_{-1}^2. \tag{47}$$

Teniendo en cuenta la desigualdad de Cauchy (15) del § 1 del cap. V y la desigualdad ε (16) del § 1 del cap. V:

$$|(g, y)_\gamma| \leqslant \varepsilon \|y\|_0'^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|g\|_0'^2. \tag{48}$$

A la fuerza del teorema del § 4 del cap. V es justa la acotación

$$\|y\|_0'^2 \leqslant M_2 \|y\|_1^2. \tag{49}$$

Poniendo las acotaciones (47) — (49) en (46) y tomando en consideración la desigualdad (44) con $\varepsilon = c/(2(1 + M_2))$, obtendremos la acotación (45). El teorema queda demostrado.

TEOREMA 5. *Si*

$$d(x) \equiv \varkappa(s) \equiv 0 \tag{50}$$

y para una función $v(x)$ *cualquiera indicada sobre la red* $\overline{\omega}$ *se cumple uniformemente con respecto a* $|h|$ *la correlación*

$$-(\overline{\Lambda}v, v)_{\overline{\omega}} \geqslant c \|\nabla v\|_0^2, \quad c = \text{const} > 0, \tag{51}$$

entonces, al verificarse la condición

$$(\Phi, 1)_{\overline{\omega}} \equiv (\varphi, 1)_{\overline{\omega}} + (g, 1)_\gamma = 0 \tag{52}$$

la solución del problema (43) *existe. Esta es única, si*

$$(y, 1)_{\overline{\omega}} = Q, \tag{53}$$

donde Q *es una constante fija. Para la solución del problema* (43), (50) *es válida la acotación apriorística*

$$\|y\|_1^2 \leqslant M\{\|\varphi\|_{-1}^2 + \|g\|_0'^2 + (y, 1)^2\}, \tag{54}$$

donde $M = \text{const} > 0$.

DEMOSTRACION. De la apariencia del operador $\overline{\Lambda}$ se desprende que éste es autoconjugado. Es fácil comprobar que, al cumplirse las condiciones (50), el cero es el valor propio de este operador, y a éste le corresponde una función propia, igual a la constante. Por esta razón de la condición (52) se desprende la existencia y de la (53), la unicidad de la solución del problema (43).

Para obtener la acotación apriorística multipliquemos la aproximación (43) como escalar por y. Tendremos que $-(\overline{\Lambda}y, y)_{\overline{\omega}} = (\varphi, y)_{\overline{\omega}} + (g, y)_\gamma$. Acotemos el segundo miembro de la identidad del mismo modo que en el teorema 4. En tal caso, teniendo en cuenta la correlación (51), obtendremos

$$c\|\nabla y\|_0^2 \leqslant \varepsilon(1 + M_2)\|y\|_1^2 + \frac{1}{4\varepsilon}(\|\varphi\|_{-1}^2 + \|g\|_0'^2).$$

Empleando ahora la desigualdad de Poincaré (véase el lema 8 del § 5 del cap. V), siendo ε suficientemente pequeño, obtenemos la acotación (54). El teorema queda demostrado.

La acotación apriorística (45) del teorema 4 se ha establecido en la suposición de que la correlación (44) es justa. Esclareceremos ahora cuáles condiciones deben imponerse sobre los coeficientes del problema (40), (41) para que se verifique la correlación (44).

TEOREMA 6 (primera condición suficiente). *Sea que los coeficientes del problema* (40), (41) *satisfacen las condiciones* (42), *y, además,*

$$q(x) \geqslant c_2 > 0, \quad x \in \overline{D}_0, \tag{55}$$

donde

$$\overline{D}_0=\{x=(x_1, x_2) \mid l_{-\alpha}\leqslant x_\alpha\leqslant l_{+\alpha}, \alpha=1, 2\}\subset\overline{D}.$$

Entonces, si la red está escogida de modo que se cumple la condición del lema 9 *del* § 5 *del cap.* V, *en tal caso para una función de red* $v(x)$ *cualquiera preestablecida sobre la red* $\overline{\omega}$ *se verifica la desigualdad:*

$$-(\overline{\Lambda}v, v)_{\overline{\omega}}\geqslant c\,\|v\|_1^2,\quad c=\text{const}>0.$$

DEMOSTRACION. En virtud de la condición (55)

$$(d, v^2)_{\overline{\omega}}\geqslant\sum_{\overline{\omega}\cap\overline{D}_0} dv^2\hbar_1\hbar_2\geqslant c_2\sum_{\overline{\omega}\cap\overline{D}_0} v^2\hbar_1\hbar_2.$$

Según la construcción

$$-(\overline{\Lambda}v, v)_{\overline{\omega}}=\sum_{\omega_1^+}\sum_{\overline{\omega}_2} a_1v_{\bar{x}_1}^2h_1\hbar_2+\sum_{\overline{\omega}_1}\sum_{\omega_2^+} a_2v_{\bar{x}_2}^2\hbar_1h_2+$$
$$+(d, v^2)_{\overline{\omega}}+(\varkappa, v^2)_\gamma.\quad(56)$$

Basándonos en las condiciones (42), deducimos del lema 9 del § 5 del cap. V y de la desigualdad anterior que

$$-(\overline{\Lambda}v, v)_{\overline{\omega}}\geqslant c_1\|\nabla v\|_0^2+c_2\sum_{\overline{\omega}\cap\overline{D}_0} v^2\hbar_1\hbar_2\geqslant c\,\|v\|_1^2.$$

El teorema queda demostrado.

TEOREMA 7 (segunda condición suficiente). *Supongamos que los coeficientes del problema* (40), (41) *satisfacen las condiciones* (42) *y, además, que*

$$\varkappa(s)\geqslant c_3>0,\quad s\in\Gamma_0,\quad(57)$$

donde $\Gamma_0\subseteq\Gamma$. *En tal caso, si la red se escoge de tal modo que está cumplida la condición del lema* 10 del § 5 del cap. V, *entonces, para una función de red* $v(x)$ *cualquiera prefijada en la red* $\overline{\omega}$ *es válido que* $-(\overline{\Lambda}v, v)_{\overline{\omega}}\geqslant c\,\|v\|_1^2$, $c=\text{const}>0$.

DEMOSTRACION. En virtud de la condición (57)

$$(\varkappa, v^2)_\gamma\geqslant\sum_{\gamma\cap\Gamma_0}\varkappa v^2\tau\geqslant c_3\sum_{\gamma\cap\Gamma_0} v^2\tau.$$

A base de esta correlación, de la (56) y del lema 9 del § 5 del cap. V, en virtud de las condiciones (42), se deduce que

$$-(\overline{\Lambda}v, v)_{\overline{\omega}}\geqslant c_1\|\nabla v\|_0^2+c_3\sum_{\gamma\cap\Gamma_0} v^2\tau\geqslant c\,\|v\|_1^2.$$

El teorema queda demostrado.

LEMA 2. *Al cumplirse las condiciones* (42) *para una función* $v(x)$ *cualquiera preestablecida sobre la red* $\overline{\omega}$

$$-(\overline{\Lambda}v, v)_{\overline{\omega}} \geqslant c_1 \| \nabla v \|_0^2.$$

La demostración se deduce justamente de la correlación (56).

TEOREMA 8. *Si se cumplen las condiciones* (42) *y* (55) *ó* (42) *y* (57), *entonces, la solución del problema* (43) *converge, en el sentido de la norma de espacio* W_2^1, *a una solución suficientemente lisa del problema* (40), (41) *con la velocidad* $O(|h|^2)$, es decir,

$$\| y - u \|_1 \leqslant M |h|^2.$$

La demostración se deduce inmediatamente de los teoremas 4, 6 y 7 y de la afirmación de que el error de aproximación (que es el problema (43)) es la magnitud $O(|h|^2)$.

Examinemos el problema (40), (41) al cumplir las condiciones (42) y (50). Como ya se señaló, en este caso dicho problema tiene solución no para cualesquiera f y g de los segundos miembros. Para que exista la solución es necesaria la suposición de que

$$\int_D f(x)\, dx + \int_\Gamma g(s)\, ds = 0. \tag{58}$$

La solución única en dicho caso puede destacarse mediante la condición

$$\int_D u(x)\, dx = Q = \text{const.} \tag{59}$$

TEOREMA 9. *Si se cumplen las condiciones* (42) *y* (50), *entonces, la solución del problema* (43), (52), (53), *cuyo segundo miembro es*

$$\Phi = \varphi(x) + \delta(\gamma) g - \{(f, 1)_{\overline{\omega}} + (g, 1)_\gamma\}/\text{mes } D$$

converge, en sentido de la norma de espacio W_2^1, *a una solución suficientemente lisa del problema* (40), (41), (58) (59) *con la velocidad* $O(|h|^2)$, es decir,

$$\| y - u \|_1 \leqslant M |h|^2.$$

DEMOSTRACION. Para el error de solución $z = y - u$ en virtud del teorema 5 tenemos la acotación

$$\| z \|_1^2 \leqslant M (\| \psi \|_{-1}^2 + \| \psi_\gamma \|_0'^2 + (z, 1)_{\overline{\omega}}^2),$$

donde ψ es el error de aproximación de la ecuación a la vez que ψ_γ es el error de aproximación de las condiciones de frontera. Dado que la solución del problema inicial se supone suficientemente lisa, entonces las funciones ψ y ψ_γ serán iguales a $O|h|^2$ en el caso de que la

perturbación del segundo miembro

$$(f,\ 1)_{\overline{\omega}} + (g,\ 1)_{\gamma}$$

será igual a $O(|h|^2)$. Pero esto ya tiene lugar porque $(f,\ 1)_{\overline{\omega}}$ y $(g,\ 1)_{\gamma}$ son fórmulas de cuadratura de los trapecios, las cuales tienen el error de $O(|h|^2)$. Teniendo en cuenta la condición (58), hallamos que

$$(f,\ 1)_{\overline{\omega}} + (g,\ 1)_{\gamma} = O(|h|^2).$$

Nos falta acotar $(z,\ 1)^2_{\overline{\omega}}$. Según la definición y en virtud de las condiciones (53) y (59)

$$(z,\ 1)_{\overline{\omega}} = (y,\ 1)_{\overline{\omega}} - (u,\ 1)_{\overline{\omega}} = \int\limits_D u\,dx - (u,\ 1)_{\overline{\omega}} = O(|h|^2).$$

puesto que $(u,\ 1)_{\overline{\omega}}$ es la fórmula de cuadratura de los trapecios. El teorema queda demostrado.

4. Primer problema de contorno para un sistema de ecuaciones de la teoría de elasticidad en un rectángulo. Procederemos a examinar el problema para un sistema de ecuaciones. Sea D el rectángulo determinado anteriormente y sea Γ su frontera. Supongamos que en el rectángulo D está preestablecido el sistema de ecuaciones de equilibrio de un cuerpo elástico isótropo homogéneo

$$\begin{aligned}(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \mu\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + (\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1\,\partial x_2} + F_1 = 0,\\ (\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1\,\partial x_2} + \mu\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + (\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + F_2 = 0\end{aligned} \tag{60}$$

y se pide hallar la solución de este sistema, la cual satisface en la frontera Γ a las condiciones de frontera homogéneas de primer género

$$u_1|_\Gamma = u_2|_\Gamma = 0. \tag{61}$$

Sea $\overline{\omega}$ una red uniforme rectangular en el dominio $\overline{D} = D \cup \Gamma$. En el § 4 del cap. IV en una red semejante fue construida la aproximación de red del sistema (60) y también fue mostrado que su error es de $O(|h|^2)$. El sistema señalado de ecuaciones de red puede escribirse en la forma

$$\begin{aligned}((\lambda+2\mu)\,y_{1\bar{x}_1})_{x_1} + (\mu y_{1\bar{x}_2})_{x_2} +\\ + \frac{1}{2}[(\lambda y_{2x_2})_{x_1} + (\lambda y_{2\bar{x}_2})_{\bar{x}_1} + (\mu y_{2x_1})_{x_2} + (\mu y_{2\bar{x}_1})_{\bar{x}_2}] + F_1 = 0,\\ \frac{1}{2}[(\lambda y_{1x_1})_{x_2} + (\lambda y_{1\bar{x}_1})_{\bar{x}_2} + (\mu y_{1x_2})_{x_1} + (\mu y_{1\bar{x}_2})_{\bar{x}_1}] +\\ + (\mu y_{2\bar{x}_1})_{x_1} + ((\lambda+2\mu)\,y_{2\bar{x}_2})_{x_2} + F_2 = 0, \quad x\in\omega.\end{aligned} \tag{62}$$

Puesto que los coeficientes λ y μ son constantes, entonces, en realidad, por ejemplo,

$$(\lambda y_{2x_2})_{x_1} + (\mu y_{2x_1})_{x_2} = (\lambda + \mu)\, y_{2x_1x_2},$$

sin embargo, la forma de escribir estos términos empleada en (62), será cómoda para la investigación siguiente. Completando el sistema (62) por la aproximación de las condiciones de frontera (61):

$$y_1 |_\gamma = y_2 |_\gamma = 0, \tag{63}$$

obtendremos el problema de red (62), (63), el cual aproxima el problema (60), (61).

Establezcamos la acotación apriorística de la solución del problema (62), (63). Con este fin multipliquemos la primera de las ecuaciones (62) por $y_1(x)\, h_1h_2$, la segunda, por $y_2(x)\, h_1h_2$, adicionemos las obtenidas correlaciones con respecto a la red ω y sumemos en total. Transformemos las expresiones que figuran bajo el signo de suma, utilizando la primera fórmula en diferencias de Green (12) del § 1 del cap. V y las fórmulas para sumar por partes (8) y (9) del mismo párrafo. Con todo esto realizaremos la transformación de cada una de las expresiones sólo con respecto a una variable, marcada por el índice exterior de toma de una razón en diferencias. Después de tomar en consideración las condiciones de frontera (63) y reagrupar los sumandos tendremos

$$2W_h = (F_1,\ y_1)_\omega + (F_2,\ y_2)_\omega, \tag{64}$$

donde

$$\begin{aligned} W_h \equiv \frac{1}{2}\Big\{ & 2\mu\,(\| y_{1\bar{x}_1} \|_0^2 + \| y_{2\bar{x}_2} \|_0^2) + \\ & + \frac{\lambda}{2}\,((y_{1\bar{x}_1} + y_{2x_2})^2,\ 1)_{\omega_1^+ \times {}^+\omega_2} + \frac{\lambda}{2}\,((y_{1x_1} + y_{2\bar{x}_2})^2,\ 1)_{{}^+\omega_1 \times \omega_2^+} + \\ & + \frac{\mu}{2}\,((y_{1x_2} + y_{2\bar{x}_1})^2,\ 1)_{\omega_1^+ \times {}^+\omega_2} + \frac{\mu}{2}\,((y_{1\bar{x}_2} + y_{2x_1})^2,\ 1)_{{}^+\omega_1 \times \omega_2^+} \Big\} \end{aligned} \tag{65}$$

es la análoga de red de la ecuación de energía de deformación elástica.

Transformemos las dos últimas expresiones que figuran en el segundo miembro de (65). Elevando al cuadrado y teniendo en cuenta las condiciones de frontera (63), transformomos la expresión $(y_{\alpha x_\beta},\ y_{\beta \bar{x}_\alpha})_\omega$ para $\alpha \neq \beta$, α, $\beta = 1, 2$ primeramente con auxilio de la fórmula para sumar por partes (8) del § 1 del cap. V con respecto a la variable x_α, luego mediante la fórmula (9) del mismo párrafo con respecto a la variable x_β, y obtenemos

$$((y_{\alpha x_\beta} + y_{\beta \bar{x}_\alpha})^2,\ 1)_{\omega_\alpha^+ \times {}^+\omega_\beta} = \| y_{1\bar{x}_2} \|_0^2 + \| y_{2\bar{x}_1} \|_0^2 + 2\,(y_{\alpha x_\alpha},\ y_{\beta \bar{x}_\beta})_\omega.$$

Poniendo estas correlaciones en (65) y omitiendo los sumandos que tienen los coeficientes $\lambda/2$, hallamos que

$$W_h \geqslant \frac{\mu}{2}\{2(\|y_{1\bar{x}_1}\|_0^2+\|y_{2\bar{x}_2}\|_0^2)+\|y_{1\bar{x}_2}\|_0^2+\|y_{2\bar{x}_1}\|_0^2+$$
$$+(y_{1x_1}, y_{2\bar{x}_2})_\omega+(y_{1\bar{x}_1}, y_{2x_2})_\omega.$$

En virtud de la desigualdad de Cauchy (15) del § 1 del cap. V y la desigualdad ε (16) del mismo párrafo

$$|(y_{\alpha\bar{x}_\alpha}, y_{\beta x_\beta})_\omega| \leqslant \frac{1}{2}\|y_{1\bar{x}_1}\|_0^2+\frac{1}{2}\|y_{2\bar{x}_2}\|_0^2.$$

Teniendo esto en cuenta, concluimos que

$$W_h \geqslant \frac{\mu}{2}\sum_{\alpha, \beta=1}^{2}\|y_{\alpha\bar{x}_\beta}\|_0^2=\frac{\mu}{2}\{\|\nabla y_1\|_0^2+\|\nabla y_2\|_0^2\}.$$

La desigualdad que acabamos de demostrar es la análoga de red de la *desigualdad de Korn* para el primer problema de contorno. De la desigualdad de Korn y de la correlación (64) se deduce que

$$\mu(\|\nabla y_1\|_0^2+\|\nabla y_2\|_0^2) \leqslant |(F_1, y_1)_\omega|+|(F_2, y_2)_\omega|. \qquad (66)$$

Acotemos los sumandos que figuran en el segundo miembro también con auxilio de la desigualdad de Cauchy y la desigualdad ε:

$$\sum_{\alpha=1}^{2}|(F_\alpha, y_\alpha)_\omega| \leqslant \sum_{\alpha=1}^{2}\left(\varepsilon\|y_\alpha\|_0^2+\|y_2\|_0^2+\frac{1}{4\varepsilon}\|F_\alpha\|_0^2\right).$$

A base del lema 7 del § 5 del cap. V

$$\|y_1\|_0^2+\|y_2\|_0^2 \leqslant (8/l_1^2+8/l_2^2)^{-1}(\|\nabla y_1\|_0^2+\|\nabla y_2\|_0^2).$$

De ésta, de la desigualdad precedente y de la desigualdad (66) para $\varepsilon=\mu(8/l_1^2+8/l_2^2)$ hallamos que

$$\|\nabla y_1\|_0^2+\|\nabla y_2\|_0^2 \leqslant \mu^{-2}(8/l_1^2+8/l_2^2)^{-1}(\|F_1\|_0^2+\|F_2\|_0^2).$$

Esta es precisamente la acotación apriorística de la cual se deducen la solubilidad del problema (62), (63) y la convergencia de su solución a la solución del problema (60), (61) con la velocidad igual a $O(|h|^2)$.

5. Problema mixto de contorno para un sistema de ecuaciones de la teoría de elasticidad en un rectángulo. Para el sistema de ecuaciones (60) analicemos un problema mixto. Sea que en un rectángulo D se pide hallar la solución del sistema de ecuaciones (60) la cual

satisface en la frontera Γ las siguientes condiciones de contorno:

$$u_1(x) = u_2(x) = 0 \text{ para } x_2 = l_2, \quad 0 \leqslant x_1 \leqslant l_1 \qquad (67)$$

$$\text{y para } x_1 = 0, \quad x_1 = l_1, \quad 0 \leqslant x_2 \leqslant l_2,$$

$$\mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) = -f_1, \quad \lambda \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u_2}{\partial x_2} = -f_2 \qquad (68)$$

$$\text{para } x_2 = 0, \quad 0 \leqslant x_1 \leqslant l_1.$$

Sobre una red rectangular uniforme $\bar{\omega}$ aproximemos el sistema de ecuaciones (60) por el sistema de ecuaciones de red (62) en tanto que las condiciones de frontera (67), por las condiciones de frontera de red

$$y_1(x) = y_2(x) = 0 \text{ para } x_2 = l_2, \ x_1 \in \bar{\omega}_1 \qquad (69)$$

$$\text{y para } x_1 = 0, \ x_1 = l_1, \ x_2 \in \bar{\omega}_2.$$

Las condiciones de frontera (68) se aproximan por unas correlaciones del tipo (18) del § 4 del cap. IV, en cuanto de las cuales en el § 4 del cap. IV se demostró que tienen un error de aproximación igual a $O(|h|^2)$:

$$\mu(y_{1x_2} + y_{2\overset{\circ}{x}_1}) + \frac{h_2}{2}[((\lambda+2\mu)y_{1\bar{x}_1})_{x_1} + (\lambda y_{2x_2})_{x_1} + (\mu y_{2x_1})_{x_2}] =$$

$$= -f_1 - \frac{h_2}{2}F_1(x_1, 0), \qquad (70)$$

$$\lambda y_{1\overset{\circ}{x}_1} + (\lambda+2\mu)y_{2x_2} + \frac{h_2}{2}[(\lambda y_{1x_1})_{x_2} + (\mu y_{1x_2})_{x_1} + (\mu y_{2\bar{x}_1})_{x_1}] =$$

$$= -f_2 - \frac{h_2}{2}F_2(x_1, 0)$$

para $x_2 = 0$, $x_1 \in \omega_1$.

Investiguemos el problema de red (62), (69), (70) que aproxima el problema (60), (67), (68) con el error de $O(|h|^2)$. Multipliquemos la primera de las ecuaciones (62) por $y_1(x)\,h_1h_2$, la segunda, por $y_2(x)\,h_1h_2$, adicionemos conforme a la red ω las correlaciones obtenidas y sumemos. Después multipliquemos la primera de las condiciones de frontera (70) por $y_1(x_1, 0)\,h_1$ y la segunda, por $y_2(x_1, 0)\,h_1$, adicionemos según la red ω_1 y sumemos. Adicionemos ahora esta correlación a la obtenida anteriormente y transformemos las expresiones que se encuentran bajo los signos de suma empleando el procedimiento usado en el p. 4 al demostrar la correlación (64). Teniendo en cuenta las condiciones de frontera (69), hallamos que

$$2W_h = \sum_{\alpha=1}^{2}(F_\alpha, y_\alpha)_{\bar{\omega}} + \sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\omega_1} f_\alpha y_\alpha|_{x_2=0}h_1 \qquad (71)$$

donde W_h se determina por la correlación (65).

Acotemos de abajo W_h. Ya que las expresiones que entran en W_h y tienen los multiplicadores $\lambda/2$ son no negativas, entonces,

$$W_h \geqslant \frac{\mu}{2}\{2(\| y_{1\bar{x}_1}\|_0^2 + \| y_{2\bar{x}_2}\|_0^2) + I\}, \tag{72}$$

donde

$$I = \frac{1}{2}((y_{1x_2} + y_{2\bar{x}_1})^2, 1)_{\omega_1^+\times{}^+\omega_2} + \frac{1}{2}((y_{1\bar{x}_2} + y_{2x_1})^2, 1)_{+\omega_1\times\omega_2^+}.$$

Transformemos la expresión de I. Elevando al cuadrado y transformando la expresión $(y_{1x_2}, y_{2\bar{x}_1})_{\omega_1^+\times+\omega_2}$ primeramente con auxilio de la fórmula para sumar por partes (9) del § 1 del cap. V con respecto a x_2, luego mediante la fórmula (8) del mismo párrafo con respecto a la variable x_1, hallamos que

$$(y_{1x_2}, y_{2\bar{x}_1})_{+\omega_1\times+\omega_2} = (y_{1x_1}, y_{2\bar{x}_2})_{+\omega_1\times\omega_2^+} - \sum_{\omega_1^+} y_1 y_{2\bar{x}}\Big|_{x_2=0} h_1.$$

Análogamente hallamos que

$$(y_{1\bar{x}_2}, y_{2\bar{x}_1})_{+\omega_1\times\omega_2^+} = (y_{1\bar{x}_1}, y_{2x_2})_{\omega_1^+\times+\omega_2} - \sum_{+\omega_1} y_1 y_{2x_1}\Big|_{x_2=0} h_1.$$

Tomando en consideración las correlaciones obtenidas, tendremos

$$I = \| y_{1\bar{x}_2}\|_0^2 + \| y_{2\bar{x}_1}\|_0^2 + (1_{1x_1}, y_{2\bar{x}_2})_{+\omega_1\times\omega_2^+} + \\ + (y_{1\bar{x}_1}, y_{2x_2})_{\omega_1^+\times+\omega_2} - \sum_{\omega_1^+} \frac{y_1 + y_1^{(-1_1)}}{2} y_{2\bar{x}_1} h_1. \tag{73}$$

Acotemos los sumandos tercero y cuarto del segundo miembro de (73) a base de la desigualdad de Cauchy y la desigualdad ε para $\varepsilon = \alpha$ mientras que el último sumando, con auxilio del teorema del complemento 2 y de la desigualdad ε para $\varepsilon = \beta$. Como resultado obtenemos

$$I \geqslant \| y_{1\bar{x}_2}\|_0^2 + \| y_{2\bar{x}_1}\|_0^2 - \alpha \| y_{1\bar{x}_1}\|_0^2 - \frac{1}{\alpha}\| y_{2\bar{x}_2}\|_0^2 - \\ - \beta\left[\varepsilon_1 \| y_{1\bar{x}_2}\|_0^2 + \left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{l_1}{\pi l_2}\right)\| y_{1\bar{x}_1}\|_0^2\right] - \\ - \frac{1}{\beta}\left[\varepsilon_2 \| y_{2\bar{x}_2}\|_0^2 + \left(\frac{1}{\varepsilon_2} + \frac{l_1}{\pi l_2}\right)\| y_{2\bar{x}_1}\|_0^2\right]. \tag{74}$$

Como $I \geqslant 0$, en tal caso para $\sigma \in [0, 1]$ tendremos $I \geqslant \sigma I$. Atendiendo esta desigualdad y (74), a base de la correlación (72) hallamos que

$$2W_h \geqslant \mu\left\{\left[2 - \sigma\left(\alpha + \beta\left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{l_1}{\pi l_2}\right)\right)\right]\| y_{1\bar{x}_1}\|_0^2 + \\ + \left[2 - \sigma\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{\varepsilon_2}{\beta}\right)\right]\| y_{2\bar{x}_2}\|_0^2 + \\ + \sigma[1 - \beta\varepsilon_1]\| y_{1\bar{x}_2}\|_0^2 + \sigma\left[1 - \frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{\varepsilon_2} + \frac{l_1}{\pi l_2}\right)\right]\| y_{2\bar{x}_1}\|_0^2. \tag{75}$$

Tomemos para los parámetros ε_2 y α ciertos valores fijos. Eligiendo luego el parámetro β a base de la condición de que $\beta > (1/\varepsilon_2 + l_1/\pi l_2)$, el parámetro ε_1 a base de la condición $0 < \varepsilon_1 < \beta^{-1}$ y el parámetro σ a partir de la condición

$$0<\sigma<\text{mín}\left\{1,\ 2\left[\alpha+\beta\left(\frac{1}{\varepsilon_1}+\frac{l_1}{\pi l_2}\right)\right]^{-1},\ 2\left[\frac{1}{\alpha}+\frac{\varepsilon_2}{\beta}\right]\right\},$$

en el segundo miembro de la desigualdad (75) obtendremos una combinación lineal de las normas de las funciones $y_{\alpha\bar{x}_\beta}$, $\alpha,\ \beta = 1,\ 2$, con los coeficientes positivos. Por lo tanto

$$2W_h \geqslant m\,(\|\nabla y_1\|_0^2 + \|\nabla y_2\|_0^2, \tag{76}$$

donde $m \equiv m\,(\mu,\ \alpha,\ \beta,\ \sigma,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2) > 0$. La desigualdad (76) se denomina desigualdad de Korn del problema mixto en cuestión.

En virtud del lema 10 del § 5 del cap. V $\|\nabla y_\alpha\|_0^2 \geqslant M_1\|y\|_1^2$ así que en vez de (76) puede escribirse la desigualdad

$$2W_h \geqslant mM_1(\|y_1\|_1^2 + \|y_2\|_1^2).$$

Teniendo presente esta desigualdad, a base de la correlación (71) hallamos la acotación

$$mM_1(\|y_1\|_1^2 + \|y_2\|_1^2) \leqslant \sum_{\alpha=1}^{2}\left\{|(F_\alpha,\ y_\alpha)_{\bar{\omega}}| + \left|\sum_{\omega_1} f_\alpha y_\alpha\right|_{x_2=0} h_1\right\}. \tag{77}$$

Acotemos el segundo miembro de esta desigualdad. En virtud de la desigualdad de Cauchy, del lema 10 del § 5 del cap. V y de la desigualdad ε

$$|(F_\alpha,\ y_\alpha)_{\bar{\omega}}| \leqslant \varepsilon\|F_\alpha\|_0^2 + \frac{M_2^2}{4\varepsilon}\|y_\alpha\|_1^2.$$

A continuación la desigualdad de Cauchy, el teorema 4 del § 4 de cap. V y la desigualdad ε nos conducen a la acotación

$$\left|\sum_{\omega_1} f_\alpha y_\alpha\Big|_{x_2=0} h_1\right| \leqslant \varepsilon\|f_\alpha\|_{L_2(\omega_1)}^2 + \frac{M_3^2}{4\varepsilon}\|y_\alpha\|_1^2.$$

Tomando en consideración estas acotaciones, hallamos a base de la desigualdad (77) que

$$\left(mM_1 - \frac{M_2^2}{4\varepsilon} - \frac{M_3^2}{4\varepsilon}\right)(\|y_1\|_1^2 + \|y_2\|_1^2) \leqslant \varepsilon\sum_{\alpha=1}^{2}(\|F_\alpha\|_0^2 + \|f_\alpha\|_{L_2(\omega_1)}^2).$$

Escogiendo ahora ε lo suficientemente grande, obtendremos la siguiente acotación apriorística de la solución del problema (62), (69), (70):

$$\|y_1\|_1^2 + \|y_2\|_1^2 \leqslant M_4\sum_{\alpha=1}^{2}(\|F_\alpha\|_0^2 + \|f_\alpha\|_{L_2(\omega_1)}^2).$$

De la acotación obtenida se desprenden la solubilidad del problema (62), (69), (70) y la convergencia de su solución a la solución del problema (60), (67), (68) con la velocidad $O(|h|^2)$.

§ 2. Método de la función de Green

Analicemos un problema en diferencias

$$\overline{\Lambda} y \equiv \sum_{\alpha=1}^{2} \overline{\Lambda}_\alpha y = -\Phi(x), \quad x \in \overline{\omega}, \tag{1}$$

$$(\Phi, 1)_{\overline{\omega}} = 0, \tag{2}$$

$$(y, 1)_{\overline{\omega}} = q, \tag{3}$$

donde

$$\overline{\Lambda}_\alpha y = \begin{cases} \frac{2}{h_\alpha} y_{x\alpha}, & x_\alpha = 0, \\ y_{\bar{x}\alpha} y_{x\alpha}, & x_\alpha \in \omega_\alpha, \\ -\frac{2}{h_\alpha} y_{\bar{x}\alpha}, & x_\alpha = l_\alpha. \end{cases}$$

La red $\overline{\omega}$ se supone que es uniforme. Examinemos las funciones de Green del operador $\overline{\Lambda}$. Puesto que para el operador $\overline{\Lambda}$ el cero es un punto de espectro al cual le corresponde una función propia igual a una constante, concluimos que se trata de la función generalizada de Green. Se determina del modo siguiente:

$$\overline{\Lambda} G(x, \xi) = \varkappa - \delta(x, \xi), \quad x \in \overline{\omega}, \quad \varkappa = (\text{mes}\, D)^{-1}, \tag{4}$$

$$(G(x, \xi), 1)_{\overline{\omega}} = Q = \text{const}. \tag{5}$$

Empleando cálculos obvios, nos convencemos fácilmente de que la solución del problema (1) — (3) se representa en la forma

$$y(x) = (G(x, \xi), \varphi(\xi))_{\overline{\omega}} + (G(x, \xi), g(\xi))_\gamma + (y(\xi), 1)_{\overline{\omega}}. \tag{6}$$

Basándonos en (6) podemos escribir que

$$\|y(x)\|_C \leqslant \max_{x \in \overline{\omega}} (\|G(x, \xi)\|_{L_1} \|\varphi\|_C + \|G(x, \xi)\|'_{L_1} \|g\|'_C) + \\ + \varkappa |(y(\xi), 1)_{\overline{\omega}}|. \tag{7}$$

Si las normas de $G(x, \xi)$, las cuales participan en (7), están acotadas uniformemente con respecto a $|h|$, entonces (7) nos da la acotación apriorística de la solución del problema (1) — (3).

Para acotar dichas normas de la función de Green utilizaremos el desarrollo de ésta por las funciones propias del operador $\overline{\Lambda}$. Se puede mostrar que para la función $G(x, \xi)$ que satisface las correla-

ciones (4), (5) el desarrollo por las funciones propias del operador $\overline{\Lambda}$ tiene la forma

$$G(x, \xi) = Q\varkappa + \sum_{|k| \neq 0} \frac{\mu_k(x)\mu_k(\xi)}{\lambda_k}, \qquad (8)$$

donde

$$|k|^2 = \sum_{\alpha=1}^{2} k_\alpha^2, \qquad k_\alpha = 0, 1, \ldots, N_\alpha,$$

mientras que $\mu_k(x)$ y λ_k se determinan según las fórmulas (33), (19), (20) del § 3 del cap. V.

LEMA 1. *Si la proyección de la función de Green $G(x, \xi)$ sobre la unidad satisface la condición*

$$Q \geqslant 2l_0^2, \quad l_0 = \text{máx}\,(l_1 l_2), \qquad (9)$$

en tal caso $G(x, \xi)$ es no negativa en la red $\overline{\omega}$ y para dicha función son válidas las correlaciones

$$\max_{x \in \overline{\omega}} \| G(x, \xi) \|_{L_1} = Q, \quad \max_{x \in \overline{\omega}} \| G(x_{\text{ı}}, \xi) \|'_{L_1} \leqslant \left(2Q\varkappa + \frac{\pi^2}{6}\right)(l_1 + l_2).$$

DEMOSTRACION. Sea $G(x, \xi; d) \equiv G^{(1)}(x, \xi; d)$ una función de Green del operador $(\overline{\Lambda} - dE)$ (d = const > 0), a la vez $G^{(m)}(x, \xi; d)$ son las iteraciones de ésta, las cuales se determinan por las correlaciones

$$(-\overline{\Lambda} + dE)^m G^{(m)}(x, \xi;, d) = \delta(x - \xi), \quad m = 1, 2, \ldots, n.$$

Comparemos la función $G(x, \xi)$ con la función $\sum_{m=1}^{n} d^{m-1} G^{(m)}(x, \xi; d)$.

Dado que los operadores $\overline{\Lambda}$, $(\overline{\Lambda} - dE)$ y $(\overline{\Lambda} - dE)^m$ tienen un sistema común de funciones propias, entonces

$$G^{(m)}(x, \xi; d) = \frac{\varkappa}{d^m} + \sum_{|k| \neq 0} \frac{\mu_k(x)\mu_k(\xi)}{(\lambda_k + d)^m}, \quad m = 1, 2, \ldots, n. \qquad (10)$$

A base de (8) y (10) hallamos que

$$G(x, \xi) - \sum_{m=1}^{n} d^{m-1} G^{(m)}(x, \xi; d) = \left(Q - \frac{n}{d}\right)\varkappa + d^n \sum_{|k| \neq 0} \frac{\mu_k(x)\mu_k(\xi)}{\lambda_k(\lambda_k + d)^n}. \qquad (11)$$

Está claro que a cuenta de una elección adecuada del parámetro n siempre se puede asegurar una suma acotada uniformemente con

respecto a $|h|$ en el segundo miembro de (11). En dicho caso de un espacio bidimensional es suficiente tomar n igual a la unidad. Sea que esta suma está acotada en magnitud absoluta por una constante M. Entonces, de (11) se deduce que, siendo

$$Q \geqslant 1/d + dM/\varkappa \equiv Q(d), \tag{12}$$

para la función $G(x, \xi)$ es justa la acotación de abajo que tiene la forma

$$G(x, \xi) \geqslant G^{(1)}(x, \xi; d). \tag{13}$$

Pero, cuando $d > 0$, para el operador $(\overline{\Lambda} - dE)$ es válido el principio del máximo y, por consiguiente, en virtud del corolario 1 del teorema 1 del § 3 del cap. III $G(x, \xi; d) \geqslant 0$*). Al cumplirse la condición (12), del hecho de que la función $G(x, \xi)$ es no negativa se deduce del modo evidente la acotación de las normas de ésta sobre la red $\overline{\omega}$. En efecto

$$\max_{x \in \overline{\omega}} \| G(x, \xi) \|_{L_1} = \max_{x \in \overline{\omega}} (G(x, \xi), 1)_{\overline{\omega}} = Q.$$

Luego

$$\| G(x, \xi) \|'_{L_1} = (G(x, \xi), 1)_\gamma = \\ = \sum_{|k| \neq 0} \frac{\mu_k(x)}{\lambda_k} (\mu_k(\xi), 1)_\gamma + Q\varkappa \operatorname{mes} \Gamma. \tag{14}$$

Pero

$$(\mu_k(\xi), 1)_\gamma = (\mu_{k_1}(\xi_1)\, \mu_{k_2}(\xi_2), 1)_\gamma = \\ = \delta_{0,k_1} [\mu_{k_2}(0) + \mu_{k_2}(l_2)] / \sqrt{l_1} + \delta_{0,k_2} [\mu_{k_1}(0) + \mu_{k_1}(l_1)] / \sqrt{l_2},$$

donde $\delta_{\alpha\beta}$ es el símbolo de Kronecker.

Poniendo esta expresión en (14) y teniendo en cuenta las correlaciones (33), (19), (21) del § 3 del cap. V, obtendremos:

$$\| G(x, \xi) \|'_{L_1} = \sum_{k_1=1}^{N_1} \mu_{k_1}(x_1) (\mu_{k_1}(0) + \mu_{k_1}(l_1)) / \lambda_{k_1} + \\ + \sum_{k_2=1}^{N_2} \mu_{k_2}(x_2) (\mu_{k_2}(0) + \mu_{k_2}(l_2)) / \lambda_{k_2} + \\ + Q\varkappa \operatorname{mes} \Gamma \leqslant (l_1 + l_2) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + Q\varkappa \operatorname{mes} \Gamma = 2Q\varkappa + \frac{\pi^2}{6}(l_1 + l_2). \tag{15}$$

---

*) Debido a que la función de Green $G^{(1)}(x, \xi; d)$ no es negativa, todas las iteraciones de ésta tampoco son negativas porque

$G^2(x, \xi; d) = (G^{(1)}(x, \eta, d), G^{(1)}(\eta, \xi; d))_{\overline{\omega}}$, etc.

Mostremos ahora que la función $G(x, \xi)$ por ser no negativa al cumplirse la condición (12) tampoco es negativa al cumplirse la condición (9). Con este fin hallemos la constante M que acota el valor absoluto de la suma que figura en el segundo miembro de (11). Tomando en consideración la forma de las funciones $\mu_k(x)$ (33) del § 3 del cap. V, obtenemos

$$\left| \sum_{|k|\neq 0} \frac{\mu_k(x)\,\mu_k(\xi)}{\lambda_k(\lambda_k+d)} \right| \leqslant 4\varkappa \sum_{|k|\neq 0} \lambda_k^{-1}(\lambda_k+d)^{-1}, \qquad (16)$$

pero ya que en virtud de (33) y (21) del § 3 del cap. V

$$\lambda_k \geqslant \frac{4}{l_0^2}(k_1^2+k_2^2),$$

entonces,

$$\sum_{|k|\neq 0} \lambda_k^{-1}(\lambda_k+d)^{-1} \leqslant (l_0/2)^4 \sum_{|k|\neq 0}^{\infty} |k|^{-4} =$$

$$= (l_0/2)^4 \left[2\sum_{k=1}^{\infty} k^{-4} - \frac{1}{4} + 2\sum_{k=1}^{\infty} (1+k^2)^{-2} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k_1,k_2=2}^{\infty} (k_1^2+k_2^2)^{-2} \right] \leqslant (l_0/2)^4 \left[\frac{\pi^4}{45} - \frac{1}{4} + 2\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\pi}{2}\int_0^{\infty} \frac{dr}{r^3} \right] = (l_0/2)^4 \left[\frac{\pi^4}{45} + \frac{2\pi-1}{2} \right] < l_0^4/4. \qquad (17)$$

Poniendo esta acotación en (16), hallaremos

$$\left| \sum_{|k|\neq 0} \frac{\mu_k(x)\,\mu_k(\xi)}{\lambda_k(\lambda_k+d)} \right| \leqslant \varkappa l_0^4 .$$

Hemos hallado la constante M. Para terminar la demostración hagamos uso de la acotación obtenida y hallemos para la funcional $Q(d)$ el mínimo con respecto a d. Es fácil comprobar que

$$\min_{d>0} Q(d) = 2l_0^2.$$

El lema 1 queda demostrado.

TEOREMA 1. *La solución del problema* (1) — (3) *existe, es única y para ésta es justa la acotación apriorística*

$$\| y \|_C \leqslant 2l_0^2 \| \varphi \|_C + \left(4l_0^2 \varkappa + \frac{\pi^2}{6} \right)(l_1+l_2) \| g \|_C' + \varkappa \,|\,(y,\ 1)\,|.$$

DEMOSTRACIÓN. La existencia y la unicidad de la solución del problema se deduce del teorema 5 del párrafo precedente y la acotación apriorística, del lema 1 y de la desigualdad (7).

Del teorema 1 y de los resultados del párrafo precedente se desprende el

TEOREMA 2. *Si para* $k_\alpha(x) \equiv 1$, $d(x) \equiv \varkappa = 0$ *la solución del problema* (40), (41), (58), (59) *del* § 1 *es* $u(x) \in C^{(4)}(D)$, *entonces, la solución del problema* (1)—(3), *cuyos segundos miembros se calculan de acuerdo con el teorema* 9 § 1, *converge uniformemente a la solución del problema, que se aproxima, con la velocidad* $O(|h|^2)$, *es decir,*

$$\| y - u \|_C \leqslant M \, | h |^2,$$

donde M *es una constante positiva que no depende de* $|h|$.

APROXIMACIÓN DE UNA CONDICIÓN DE FRONTERA DE TERCER GÉNERO EN UNA FRONTERA CURVILINEA (RED NO ADAPTADA)

En el p. 5 del § 3 del cap. IV se construyó la aproximación de dicha condición de frontera para la ecuación de Poisson en una red construida del modo especial (que es una red adaptada). En éste examinaremos la aproximación de una condición de frontera de tercer género para la ecuación de Poisson en una frontera curvilínea para el caso más general, o sea, sobre una red que no es adaptada. La construcción de la aproximación de red de la condición de frontera y la aproximación de red para la ecuación en afueras de la frontera se realizará según el método de Ritz.

Sea que en un recinto G con una frontera Γ se busca la solución del problema

$$\Delta u = -f(x), \quad x \in G, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \varkappa(x)\, u - g(x), \quad x \in \Gamma, \tag{1}$$

donde la función $\varkappa(x) \geqslant 0$ para $x \in \Gamma$ y $\varkappa(x) \not\equiv 0$. El hallazgo de la solución del problema (1) equivale a la búsqueda de la función $u(x) \in W_2^1(G)$ que minimiza la siguiente funcional:

$$I(u) \equiv \frac{1}{2}\int\limits_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2\right] dx + \frac{1}{2}\int\limits_\Gamma \varkappa u^2 ds - \int\limits_G f(x)\, u(x)\, dx - \int\limits_\Gamma g(x)\, u(x)\, ds. \tag{2}$$

Cubramos el plano Ox_1x_2 con una red uniforme rectangular

$$\Omega = \{x = (x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}) \mid x_\alpha^{(i_\alpha)} = h_\alpha i_\alpha, \quad i_\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; \ \alpha = 1, 2\}.$$

Dividamos cada una de las casillas rectangulares

$$G[i] = \{x = (x_1, x_2) \mid x_\alpha^{(i_\alpha)} \leqslant x_\alpha \leqslant x_\alpha^{(i_\alpha + 1)}, \ \alpha = 1, 2\}$$

por la diagonal, que forma el ángulo $\operatorname{arctg} h_2/h_1$ con el eje Ox_1, en dos triángulos. Igual que en el p. 2 del § 2 del cap. IV, designemos por $\overline{G}_h$ el mínimo conjunto de los triángulos señalados que contiene G, al mismo tiempo en calidad de un subespacio de dimensión finita V del espacio $W_2^1(G)$ tomemos el espacio de las funciones continuas en $\overline{G}_h$ y lineales sobre cada uno de los triángulos. Sean $\overline{\omega} = G_h \cap \Omega$ la red para el problema (1), $\omega = \overline{\omega} \cap G$ el conjunto de los nodos regulares de la red y $\gamma = \overline{\omega} \setminus \omega$, el conjunto de los nodos de frontera. Designemos $\mathfrak{M} = \{i = (i_1, i_2) \mid x_i \in \overline{\omega}\}$.

La solución aproximada del problema (1) se buscará en la forma

$$u(x) = \sum_{j \in \mathfrak{M}} y_j \eta_j(x), \quad j = (j_1, j_2), \tag{3}$$

donde $\{\eta_j\}$ es la base del subespacio V, cuyos elementos $\eta_j(x)$ se prefijan por la correlación (16) § 2 del cap IV.

Como siempre, pongamos la correlación (3) en la funcional (2), diferenciemos la obtenida expresión con respecto a y_j e igualemos el resultado a cero. En definitiva hallamos el sistema de ecuaciones

$$\sum_{j\in\mathfrak{M}} A_i^j y_j = \Phi_i, \qquad i\in\mathfrak{M}, \tag{4}$$

donde los coeficientes del sistema se calculan de acuerdo con la fórmula

$$A_i^j = \int\limits_G \left[\frac{\partial\eta_i}{\partial x_1}\frac{\partial\eta_j}{\partial x_1} + \frac{\partial\eta_i}{\partial x_2}\frac{\partial\eta_j}{\partial x_2}\right] dx + \int\limits_\Gamma \varkappa\eta_i\eta_j\, ds, \tag{5}$$

mientras que los elementos del segundo miembro, según la fórmula

$$\Phi_i = \int\limits_G f\eta_i\, dx + \int\limits_\Gamma g\eta_i\, ds. \tag{6}$$

Calculemos los coeficientes A_i^j y los segundos miembros Φ_i para los i que corresponden a los nodos de frontera γ y a algunos nodos interiores ω adyacentes a la frontera. Para tener la posibilidad de llevar a cabo los cálculos supondremos que la frontera es rectilínea en el entorno de un nodo en cuestión. Más aún, supongamos para precisión que en una sección, que examinamos, de la frontera $\varkappa(x) = 0$.

Sea que $x_i \in \omega$ y $x_{i'} \in \gamma$ donde $i' = (i_1 + 1,\ i_2)$. Consideraremos que el nodo x_i se encuentra en el origen de coordenadas, es decir, $i_1 = i_2 = 0$, y la frontera Γ en el entorno de este nodo se indica por la ecuación

$$\frac{x_1}{\theta_1 h_1} + \frac{x_2}{\theta_2 h_2} = 1, \tag{7}$$

donde $0 < \theta_1,\ \theta_2 < 1$.

Calculemos los coeficientes y los segundos miembros de las ecuaciones (4) para el nodo regular (0, 0) y un nodo de frontera (h_1, h_2). Enumeremos los nodos que nos van a interesar en lo sucesivo, de la manera siguiente: 0 es el nodo con las coordenadas (0, 0); 1, el nodo $(h_1, 0)$; 2, el nodo $(0, h_2)$; 3, el nodo $(-h_1, 0)$; 4, el nodo $(0, -h_2)$ y 5, el nodo (h_1, h_2). Poniendo en la fórmula 5 las expresiones de las derivadas $\partial\eta_i/\partial x_\alpha$ de (20) del § 2 del cap. IV y tomando en consideración que las coordenadas de los puntos de intersección de la frontera, preestablecida por la ecuación (7), con las rectas $x_1/h_1 - x_2/h_2 = 0$ y $x_1/h_1 - x_2/h_2 = \mp 1$ son, respectivamente,

$$\left(\frac{\theta_1 6_2}{\theta_1+\theta_2}h_1,\ \frac{\theta_1\theta_2}{\theta_1+\theta_2}h_2\right),\quad \left(-\frac{\theta_1(1-\theta_2)}{\theta_1+\theta_2}h_1,\ \frac{(1+\theta_1)\theta_2}{\theta_1+\theta_2}h_2\right),$$
$$\left(\frac{\theta_1(1+\theta_2)}{\theta_l+\theta_2}h_1,\ -\frac{(1-\theta_1)\theta_2}{\theta_1+\theta_2}h_2\right),$$

hallamos los coeficientes de las ecuaciones.

Para el punto 0:

$$A_0^1 = -\frac{h_2}{2h_1}\frac{\theta_1(1+2\theta_2)}{\theta_1+\theta_2},\quad A_0^2 = -\frac{h_1}{2h_2}\frac{\theta_2(1+2\theta_1)}{\theta_1+\theta_2},$$
$$A_0^3 = -\frac{h_2}{2h_1}\frac{\theta_1+2\theta_2+2\theta_1\theta_2-\theta_1\theta_2^2}{\theta_1+\theta_2},\quad A_0^4 = -\frac{h_1}{2h_2}\frac{2\theta_1+\theta_2+2\theta_1\theta_2-\theta_1^2\theta_2}{\theta_1+\theta_2},$$
$$A_0^0 = -(A_0^1 + A_0^2 + A_0^3 + A_0^4).$$

Para el punto 5:

$$A_5^1 = -\frac{h_1}{2h_2}\frac{\theta_1^2\theta_2}{\theta_1+\theta_2}, \quad A_5^2 = -\frac{h_2}{2h_1}\frac{\theta_1\theta_2^2}{\theta_1+\theta_2}, \quad A_5^5 = -(A_5^1 + A_5^2).$$

Poniendo en la fórmula (6) las expresiones de $\eta_l(x)$ de (16) del § 2 del cap. IV, hallamos

$$\Phi_0 = \int\limits_{G\cap \bar{G}[0]} f(x)\,\eta_0(x)\,dx + \int\limits_{\Gamma} g(x)\,\eta_0(x)\,ds,$$

$$\Phi_5 = \int\limits_{G\cap \bar{G}[5]} f(x)\,\eta_5(x)\,dx + \int\limits_{\Gamma} g(x)\,\eta_5(x)\,ds.$$

Si en el entorno en cuestión del punto 0 las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son constantes, entonces,

$$\Phi_0 = f\frac{h_1h_2}{6(\theta_1+\theta_2)^2}[3(\theta_1+\theta_2)^2 + 6\theta_1\theta_2(\theta_1+\theta_2) + \theta_1^2\theta_2^2(\theta_1+\theta_2) - $$
$$- 2\theta_1^2\theta_2^2(\theta_1^2+\theta_2^2)] + g\,\frac{\sqrt{h_1^2\theta_1^2+h_2^2\theta_2^2}}{\theta_1+\theta_2}\left(1-\frac{\theta_1\theta_2}{2}\right),$$

$$\Phi_5 = f\frac{h_1h_2}{6}\,\frac{\theta_1^2\theta_2^2}{\theta_1+\theta_2} + g\,\frac{\sqrt{h_1^2\theta_1^2+h_2^2\theta_2^2}}{2(\theta_1+\theta_2)}\,\theta_1\theta_2.$$

Poniendo los coeficientes obtenidos y los segundos miembros que acabamos de hallar, en el sistema de ecuaciones (4), obtendremos las siguientes ecuaciones:

$$\frac{1}{h_1}\left[\frac{\theta_1(1+2\theta_2)}{2(\theta_1+\theta_2)}\,\frac{y_1-y_0}{h_1} - \frac{\theta_1+2\theta_2+2\theta_1\theta_2-\theta_1\theta_2^2}{2(\theta_1+\theta_2)}\,\frac{y_0-y_3}{h_1}\right] +$$
$$+\frac{1}{h_2}\left[\frac{\theta_2(1+2\theta_1)}{2(\theta_1+\theta_2)}\,\frac{y_2-y_0}{h_2} - \frac{\theta_2+2\theta_1+2\theta_1\theta_2-\theta_1^2\theta_2}{2(\theta_1+\theta_2)}\,\frac{y_0-y_4}{h_2}\right] = -\frac{1}{h_1h_2}\,\Phi_0,$$
$$\frac{h_2}{2}\,\frac{\theta_1\theta_2^2}{(\theta_1+\theta_2)}\,\frac{y_5-y_2}{h_1} + \frac{h_1}{2}\,\frac{\theta_1^2\theta_2}{\theta_1+\theta_2}\,\frac{y_5-y_1}{h_2} = -\Phi_5.$$

COMPLEMENTO 2

ACOTACIÓN DE LA TRAZA DEL PRODUCTO DE FUNCIONES DE RED

Al demostrar la análoga de red de la desigualdad de Korn para el caso en que la función-vector $y = (y_1(x), y_2(x))$ se anula sólo en tres lados del rectángulo de red tropezamos con la necesidad de saber acotar

$$\sum_{x_1\in\omega_1^+} \frac{y_1+y_1^{(-1_1)}}{2}\,y_{2\bar{x}_1}h_1$$

siendo fijo el valor de $x_2 \in \bar{\omega}_2$. La acotación que nos interesa la nos da el

TEOREMA 6. *Para un par cualquiera de las funciones de red $u(x)$ y $v(x)$ que se prefijan sobre una red uniforme $\overline{\omega} = \overline{\omega}_1 \times \overline{\omega}_2$ y se anulan cuando $x_1 = 0$ y $x_1 = l_1$, es válida la desigualdad*

$$\left\| \sum_{x_1 \in \omega_1^+} h_1 \frac{u(x) + u^{(-1_1)}(x)}{2} v_{\bar{x}_1} \right\|_{C(\overline{\omega}_2)} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \varepsilon_1 \| u_{\bar{x}_2} \|_0^2 + \left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{l_1}{\pi l_2} \right) \| u_{\bar{x}_1} \|_0^2 \right\}^{1/2} \times$$

$$\times \left\{ \varepsilon_2 \| v_{\bar{x}_2} \|_0^2 + \left(\frac{1}{\varepsilon_2} + \frac{l_1}{\pi l_2} \right) \| u_{\bar{x}_1} \|_0^2 \right\}^{1/2}, \qquad (1)$$

donde ε_1 y ε_2 son constantes positivas arbitrarias.

La DEMOSTRACION se efectúa en tres etapas. En la primera etapa demostremos que la desigualdad (1) se deduce de la desigualdad análoga para las funciones de argumento continuo, o sea, de la desigualdad

$$\sup_{0 \leqslant y_2 \leqslant l_2} \left| \int_0^{l_1} \tilde{u}(y) \frac{\partial \tilde{v}(y)}{\partial y_1} dy_1 \right| \leqslant \left\{ \varepsilon_1 \left\| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_2} \right\|^2_{L_2(\overline{D})} + \left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{l_1}{\pi l_2} \right) \left\| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_1} \right\|^2_{L_2(\overline{D})} \right\}^{1/2} \times$$

$$\times \left\{ \varepsilon_2 \left\| \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y_2} \right\|^2_{L_2(\overline{D})} + \left(\frac{1}{\varepsilon_2} + \frac{l_1}{\pi l_2} \right) \left\| \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y_1} \right\|^2_{L_2(\overline{D})} \right\}^{1/2}. \qquad (2)$$

Luego establezcamos la acotación

$$\left| \int_0^{l_1} \tilde{u}(y) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y_1} dy_1 \right| \leqslant \| \tilde{u} \|_{\overline{W}_2^{1/2}[0, l_1]} \| \tilde{v} \|_{\overline{W}_2^{1/2}[0, l_1]}, \qquad (3)$$

donde $\| \cdot \|_{\overline{W}_2^{1/2}[0, l_1]}$ es cierta norma definible a continuación. Terminemos la demostración del teorema por obtener para las funciones $\tilde{u}(y)$ y $\tilde{v}(y)$ acotaciones de la forma

$$\sup_{0 \leqslant y_2 \leqslant l_2} \| \tilde{w}(y) \|^2_{\overline{W}_2^{1/2}[0, l_1]} \leqslant \varepsilon \left\| \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y_2} \right\|^2_{L_2(\overline{D})} + \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{l_1}{\pi l_2} \right) \left\| \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y_1} \right\|^2_{L_2(\overline{D})}, \qquad (4)$$

donde ε es un número positivo cualquiera.

Realicemos el plan marcado. 1) Sea $\overline{D} = \{ y = (y_1, y_2) \mid 0 \leqslant y_\alpha \leqslant l_\alpha;\ \alpha = 1, 2 \}$ un rectángulo y $\overline{\omega} = \overline{\omega}_1 \times \overline{\omega}_2$, una red en el rectángulo $\overline{D}$, donde $\overline{\omega}_\alpha = \{ x_\alpha = h_\alpha i_\alpha \mid i_\alpha = 0, 1, \ldots, N_\alpha;\ N_\alpha = l_\alpha / h_\alpha \}$. Dividamos el rectángulo $\overline{D}$ por las rectas $y_\alpha = h_\alpha i_\alpha$ e $y_2 \frac{h_2}{h_1} y_1 + h_1 i_1$, donde $i_\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, en triángulos rectángulos iguales entre sí, cuyos vértices son nodos de la red $\overline{\omega}$. A base de las funciones de red $u(x)$ y $v(x)$, $x \in \overline{\omega}$, construyamos sus complementos lineales a trozos $\tilde{u}(y)$ y $\tilde{v}(y)$, es decir, tales funciones continuas que son lineales sobre cada uno de los triángulos señalados y coinciden con $u(x)$ y $v(x)$ cuando $y = x \in \overline{\omega}$. Las

derivadas de las funciones que construimos $\partial\widetilde{u}/\partial y_\alpha$ y $\partial\widetilde{v}/\partial y_\alpha$ son constantes a trozos y por esta razón

$$\| u_{\bar{x}_\alpha} \|_0^2 = \int_0^{l_1}\int_0^{l_2} \left(\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial y_\alpha}\right)^2 dy_1\,dy_2, \quad \| v_{\bar{x}_\alpha} \|_0^2 = \int_0^{l_1}\int_0^{l_2} \left(\frac{\partial \widetilde{v}}{\partial y_\alpha}\right)^2 dy_1\,dy_2. \tag{5}$$

Luego,

$$\sum_{x_1\in\omega_1^+} h_1 \frac{u(x)+u^{(-1_1)}(x)}{2} v_{\bar{x}_1}(x)$$

coincide con la fórmula de cuadratura de los trapecios para la integral

$$\int_0^{l_1} \widetilde{u}(y) \frac{\partial \widetilde{v}(y)}{\partial y_1} dy_1,$$

y ya que $\widetilde{u}\,\partial\widetilde{v}/\partial y_1$ es lineal a trozos, entonces, para $y_2 = x_2 \in \overline{\omega}_2$

$$\sum_{x_1\in\omega_1^+} h_1 \frac{u(x)+u^{(-1_1)}(x)}{2} v_{\bar{x}_1}(x) = \int_0^{l_1} \widetilde{u}(y) \frac{\partial \widetilde{v}(y)}{\partial y_1} dy_1. \tag{6}$$

De aquí se desprende que

$$\left\| \sum_{x_1\in\omega_1^+} h_1 \frac{u(x)+u^{(-1_1)}(x)}{2} v_{\bar{x}_1}(x) \right\|_{C(\overline{\omega}_2)} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{0\leqslant y_2\leqslant l_2} \left| \int_0^{l_1} \widetilde{u}(y) \frac{\partial \widetilde{v}(y)}{\partial y_1} dy_1 \right|. \tag{7}$$

Teniendo en cuenta las correlaciones (5) — (7) concluimos que el teorema será demostrado si se establece la desigualdad (2).

2) Demostremos ahora la desigualdad (3). Sea $w(y_1)$ una función indicada sobre un segmento $[0, l_1]$ y que se anula cuando $y_1 = 0$ e $y_1 = l_1$. Designemos

$$\| w \|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^{1/2}[0,\, l_1]} = \sum_{k=1}^{\infty} w_k^2 \frac{k\pi}{l_1}, \tag{8}$$

donde w_k son los coeficientes de Fourier de la función $w(y_1)$ en desarrollo según el sistema ortonormalizado $\left\{ \sqrt{2/l_1} \operatorname{sen} \frac{k\pi y_1}{l_1} \right\}_1^\infty$, es decir,

$$w_k = \sqrt{2/l_1} \int_0^{l_1} w(y_1) \operatorname{sen} \frac{k\pi y_1}{l_1} dy_1, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Para $y_2 \in [0, l_2]$ fijo desarrollemos las funciones $\widetilde{u}(y)$ y $\widetilde{v}(y)$ según el sistema ortonormalizado indicado:

$$\widetilde{u}(y) = \sqrt{\frac{2}{l_1}} \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{u}_k(y_2) \operatorname{sen} \frac{k\pi y_1}{l_1}, \quad \widetilde{v}(y) = \sqrt{\frac{2}{l_1}} \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{v}_k(y_2) \operatorname{sen} \frac{k\pi y_1}{l_1}.$$

Poniendo estos desarrollos en el primer miembro de la desigualdad (3) y hacien do cálculos obvios, hallamos que

$$\int_0^{l_1} \widetilde{u}(y)\frac{\partial \widetilde{v}(y)}{\partial y_1}\,dy_1 = \frac{2}{l_1}\sum_{\substack{p,\,q=1\\ p\neq q}}^{\infty}\frac{pq}{p^2-q^2}\,[1-(-1)^{p+q}]\,\widetilde{u}_p(y_2)\,\widetilde{v}_q(y_2).$$

Tomando en consideración la definición (8) y la última correlación, deducimos que la desigualdad (3) será establecida si se demuestra que la forma bilineal

$$A(\xi,\eta)\equiv\sum_{\substack{p,\,q=1\\ p\neq q}}^{\infty} a_{pq}\xi_p\eta_q. \qquad (9)$$

donde

$$a_{pq}=\frac{\sqrt{pq}}{p^2-q^2}\,[1-(-1)^{p+q}],\quad p\neq q, \qquad (10)$$

está acotada por la constante $\pi/2$, es decir,

$$|A(\xi,\eta)|\leqslant\frac{\pi}{2}\left(\sum_{p=1}^{\infty}\xi_p^2\sum_{q=1}^{\infty}\eta_q^2\right)^{1/2}. \qquad (11)$$

Demostremos la desigualdad (11). Primeramente examinemos la forma bilineal $B(\xi,\eta)$, cuyos coeficientes se determinan por las correlaciones

$$b_{pq}=\frac{1-(-1)^{p+q}}{p-q},\quad p\neq q,\ b_{pp}=0, \qquad (12)$$

y demostremos que ésta está acotada por la constante π. Con este fin sometamos al examen la forma bilineal $C(\xi,\eta)$ con los coeficientes

$$c_{pq}=\frac{1-(-1)^{p+q}}{p+q},$$

así como también las formas conjugadas $B'(\xi,\eta)$ y $C'(\xi,\eta)$, cuyas matrices de los coeficientes B' y C' son conjugadas con las matrices de los coeficientes B y C de las formas $B(\xi,\eta)$ y $C(\xi,\eta)$, respectivamente. A base de las formas $B(\xi,\eta)$, $C(\xi,\eta)$ y las conjugadas con éstas construyamos las formas $F(\xi,\eta)$ y $G(\xi,\eta)$, cuyas matrices de los coeficientes F y G son los productos de las matrices de B por B' y de C por C', respectivamente, es decir,

$$f_{pq}=\sum_{k=1}^{\infty} b_{pk}b_{qk},\quad g_{pq}=\sum_{k=1}^{\infty} c_{pk}c_{qk}.$$

Es evidente que las matrices F y G son simétricas y no negativas: $F=F'$, $G=G'$, $F(\xi,\xi)\geqslant 0$, $G(\xi,\xi)\geqslant 0$.

Sea que la forma cuadrática $F(\xi, \xi)$ está acotada por la constante M^2: $F(\xi,\xi) \leqslant M^2 \sum_{p=1}^{\infty} \xi_p^2$. Entonces,

$$B(\xi,\eta) = \left| \sum_{q=1}^{\infty} \eta_q \sum_{p=1}^{\infty} b_{pq}\xi_p \right| \leqslant \left(\sum_{q=1}^{\infty} \eta_q^2 \right)^{1/2} \left\{ \sum_{q=1}^{\infty} \left(\sum_{p=1}^{\infty} b_{pq}\xi_p \right)^2 \right\}^{1/2} = \left(\sum_{q=1}^{\infty} \eta_q^2 \right)^{1/2} \{F(\xi,\xi)\}^{1/2} \leqslant M \left(\sum_{p=1}^{\infty} \xi_p^2 \sum_{q=1}^{\infty} \eta_q^2 \right)^{1/2}, \qquad (13)$$

es decir, del hecho de que la forma cuadrática $F(\xi, \xi)$ está acotada por la constante M^2 se desprende que la forma bilineal $B(\xi, \eta)$ está acotada por la constante M, por esta razón es suficiente demostrar que está acotada la forma $F(\xi, \xi)$. Además, como $G(\xi, \xi) \geqslant 0$, entonces, $F(\xi, \xi) \leqslant F(\xi, \xi) + G(\xi, \xi) \equiv H(\xi, \xi)$.

Acotemos la forma cuadrática $H(\xi, \xi)$. Al principio calculemos sus coeficientes:

$$h_{pp} = f_{pp} + g_{pp} = \sum_{k=1}^{\infty} (b_{pk}^2 + c_{pk}^2) = \sum_{k=1}^{\infty} [1-(-1)^{p+k}]^2 \left[\frac{1}{(p+k)^2} + \frac{1}{(p-k)^2} \right] = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} [1-(-1)^{p+k}] \frac{1}{(p+k)^2} - 2[1-(-1)^p] \frac{1}{p^2}.$$

Haciendo la sustitución del índice de suma $p + k = k'$ y omitiendo la tilda, obtendremos que

$$h_{pp} = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} [1-(-1)^k] \frac{1}{k^2} - 2[1-(-1)^p] \frac{1}{p^2} = 8 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} - 2[1-(-1)^p] \frac{1}{p^2}.$$

Se sabe*) que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \text{ y por lo tanto } h_{pp} = \pi^2 - 2[1-(-1)^p] \frac{1}{p^2}.$$

Para $p \neq q$

$$h_{pq} = \sum_{k=1}^{\infty} (b_{pk}b_{qk} + c_{pk}c_{qk}) = \sum_{k=1}^{\infty} [1-(-1)^{p+k}][1-(-1)^{q+k}] \left[\frac{1}{(p+k)(q+k)} - \right.$$

*) *Gradshtéin I. S.* y *Rizhik I. M.*, Tablas de integrales, sumas, series y productos (Градштейн И. С., Рыжик И. М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, М., «Наука», 1971, формула 0.234.2)

$$-\frac{1}{(p-k)(q-k)}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{[1-(-1)^{p+k}][1-(-1)^{q+k}]}{(p+k)(q+k)}-$$

$$-\frac{[1-(-1)^{p}[1-(-1)^{q}]}{pq}=\bar{h}_{pq}-\frac{[1-(-1)^{p}][1-(-1)^{q}]}{pq}.$$

Investiguemos $\bar{h}_{pq}$:

$$\bar{h}_{pq}=\frac{1}{p-q}\sum_{k=-\infty}^{\infty}[1-(-1)^{p+k}][1-(-1)^{q+k}]\left[\frac{1}{q+k}-\frac{1}{p+k}\right]=$$

$$=\frac{4}{p-q}\begin{cases}\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{q+2k-1}-\frac{1}{p+2k-1}\right], & \text{si } p \text{ y } q \text{ son pares,}\\ \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{q+2k}-\frac{1}{p+2k}\right], & \text{si } p \text{ y } q \text{ son impares,}\\ 0, & \text{si } p+q \text{ es impar.}\end{cases}$$

Estudiemos cada una de las sumas por separado:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{q+2k-1}-\frac{1}{p+2k-1}\right]=\lim_{k\to\infty}\sum_{k=-K}^{K}\left[\frac{1}{q+2k-1}-\frac{1}{p+2q-1}\right].$$

La expresión que fig ra bajo el símbolo lím puede escribirse en la forma

$$\sum_{k=-K}^{K}\left[\frac{1}{q+2k-1}-\frac{1}{p+2k-1}\right]=\sum_{i=-K}^{K}\frac{1}{q+2i-1}-\sum_{j=-K}^{K}\frac{1}{p+2j-1}=h_{pq}^{(1)}(K).$$

Puesto que p y q son números pares, en cada una de las sumas se puede hacer la sustitución del índice de suma: $q+2i=2k$, $p+2j=2k$. Como resultado tenemos

$$h_{pq}^{(1)}(K)=\sum_{k=-K+q/2}^{K+q/2}\frac{1}{2k-1}-\sum_{k=-K+p/2}^{K+p/2}\frac{1}{2k-1}.$$

Para $|p|, |q|<K$ y $q<q$

$$h_{pq}^{(1)}(K)=\sum_{k=-K+q/2}^{K+p/2}\frac{1}{2k-1}+\sum_{k=K+1+p/2}^{K+q/2}\frac{1}{2k-1}-$$

$$-\sum_{k=-K+p/2}^{-K-1+q/2}\frac{1}{2k-1}-\sum_{k=-K+q/2}^{K+p/2}\frac{1}{2k-1}=$$

$$=\sum_{k=K+1+p/2}^{K+p/2}\frac{1}{2k-1}-\sum_{k=-K+p/2}^{-K-1+q/2}\frac{1}{2k-1}.$$

De aquí hallamos que para $p < q$ y $|p|,\ |q| < K$

$$|h_{pq}^{(1)}(K)| \leqslant \frac{|p-q|}{2K+1-|p|},$$

y, por consiguiente, para $p < q$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{q+2k-1}-\frac{1}{p+2k-1}\right]=\lim_{K\to\infty} h_{pq}^{(1)}(K)=0.$$

Análogamente se establece que esta suma es igual a cero también cuando $p > q$; asimismo establecemos la igualdad a cero de la suma

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{q+2k}-\frac{1}{p+2k}\right].$$

De esta forma, $\overline{h}_{pq} = 0$ y, por consiguiente,

$$h_{pq}=-\frac{[1-(-1)^p][1-(-1)^q]}{pq}.$$

Por lo tanto,

$$H(\xi,\xi)=\pi^2\sum_{p=1}^{\infty}\xi_p^2-\sum_{p,q=1}^{\infty}\frac{[1-(-1)^p][1-(-1)^q]}{pq}\xi_p\xi_q=$$

$$=\pi^2\sum_{p=1}^{\infty}\xi_p^2-4\sum_{p,q=1}^{\infty}\frac{\xi_{2p-1}\xi_{2q-1}}{(2p-1)(2q-1)}.$$

Pero

$$\sum_{p,q=1}^{\infty}\frac{\xi_{2p-1}\xi_{2q-1}}{(2p-1)(2q-1)}=\left(\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\xi_{2p-1}}{2p-1}\right)^2\geqslant 0$$

y, por consiguiente,

$$H(\xi,\xi)\leqslant\pi^2\sum_{p=1}^{\infty}\xi_p^2.$$

De esta desigualdad y de (13) se deduce la acotación

$$|B(\xi,\eta)|=\left|\sum_{\substack{p,q=1\\ p\neq q}}^{\infty}\frac{1-(-1)^{p+q}}{p-q}\xi_p\eta_q\right|\leqslant\pi\left(\sum_{p=1}^{\infty}\xi_p^2\sum_{q=1}^{\infty}\eta_q^2\right)^{1/2}. \tag{14}$$

Antes de pasar a la demostración de la desigualdad (11), sometamos al examen una forma cuadrática más:

$$S(\xi,\xi)=\sum_{p,q=1}^{\infty}\frac{\xi_p\xi_q}{p+q}. \tag{15}$$

Dado que $\frac{1}{p+q}=\int\limits_0^\infty e^{-(p+q)t}\,dt$, entonces,

$$S(\xi,\ \xi)=\lim_{n\to\infty}\sum_{p,q=1}^{n}\frac{\xi_p\xi_q}{p+q}=\int\limits_0^\infty\left(\sum_{p=1}^{\infty}\xi_p e^{-pt}\right)^2 dt\geqslant 0,$$

es decir, la forma cuadrática $S(\xi,\ \xi)$ no es negativa. Suponiendo en (15) que $\xi_p=\sqrt{p}\,\xi_p'$, nos convencemos de que la forma cuadrática

$$T(\xi,\ \xi)=\sum_{p,q=1}^{\infty}t_{pq}\xi_p\xi_q,\qquad t_{pq}=\frac{\sqrt{pq}}{p+q},$$

tampoco es negativa. Sea n cierto número entero positivo y

$$T_n(\xi,\ \xi)=\sum_{p,q=1}^{\infty}t_{pq}\xi_p\xi_q,\qquad t_{pq}=\frac{\sqrt{pq}}{p+q}. \tag{16}$$

Según lo demostrado la forma cuadrática $T_n(\xi,\ \xi)$ no es negativa y, por consiguiente, de su matriz es posible extraer la raíz cuadrada $T_n^{1/2}=U_n$. Sean u_{pq} los elementos de la matriz U_n. Entonces,

$$t_{pq}=\sum_{r=1}^{n}u_{rp}u_{rq}. \tag{17}$$

Examinemos la forma bilineal

$$A_n(\xi,\ \eta)=\sum_{\substack{p,q=1\\ p\neq q}}^{n}a_{pq}\xi_p\eta_q,$$

cuyos coeficientes se determinan por las correlaciones (10). Cuando $n\to\infty$, esta forma bilineal se convierte en la forma (9), que nos interesa. De (10), (12), (16) y (17) se desprende que

$$a_{pq}=b_{rq}t_{rq}=b_{pq}\sum_{r=1}^{n}u_{rp}u_{rq},$$

es decir,

$$A_n(\xi,\ \eta)=\sum_{r=1}^{n}\sum_{\substack{p,q=1\\ p\neq q}}^{n}b_{pq}(u_{rp}\xi_p)(u_{rq}\eta_q)=\sum_{r=1}^{n}B_n(u_{rp}\xi_p,\ u_{rq}\eta_q), \tag{18}$$

donde $B_n(\alpha_p, \beta_q) = \sum_{p,q=1}^{n} b_{pq}\alpha_p\beta_q$. En virtud de la acotación (14) la forma bilineal $B_n(\alpha_p, \beta_q)$ tiene una cara igual a π y, por consiguiente,

$$|B_n(u_{rp}\xi_p, u_{rq}\eta_q)| \leqslant$$

$$\leqslant \pi\left[\sum_{p=1}^{n}(u_{rp}\xi_p)^2\sum_{p=1}^{n}(u_{rp}\eta_p)^2\right]^{1/2} \leqslant \frac{\pi}{2}\sum_{p=1}^{n}(u_{rp})^2(\xi_p^2+\eta_p^2).$$

Empleando esta desigualdad para acotar el segundo miembro de la correlación (18) y teniendo presente (17), obtendremos que

$$|A_n(\xi, \eta)| \leqslant \frac{\pi}{2}\sum_{p=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}(u_{rp})^2(\xi_p^2+\eta_p^2) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\sum_{p=1}^{n} t_{pp}(\xi_p^2+\eta_p^2) \leqslant \frac{\pi}{2}\max_{1\leqslant p\leqslant n} t_{pp}\sum_{p=1}^{n}(\xi_p^2+\eta_p^2).$$

Pero de (16) se deduce que $\max t_{pp} = 1/2$ y por lo tanto

$$|A_n(\xi, \eta)| \leqslant \frac{\pi}{4}\sum_{p=1}^{n}(\xi_p^2+\eta_p^2).$$

Sea que $\sum_{p=1}^{n}\xi_p^2 = \sum_{p=1}^{n}\eta_p^2 = 1$. En tal caso $|A_n(\xi, \eta)| \leqslant \pi/2$. Poniendo en $A_n(\xi, \eta)$

$$\xi_p = \xi'_p \Big/ \left(\sum_{p=1}^{n}\xi_p'^2,\right)\ \eta_p = \eta'_p \Big/ \left(\sum_{p=1}^{n}\eta'_p\right),$$

llegamos a la siguiente desigualdad:

$$|A_n(\xi', \eta')| \leqslant \frac{\pi}{2}\left(\sum_{p=1}^{n}\xi_p'^2\sum_{q=1}^{n}\eta_q'^2\right)^{1/2}.$$

Pasando al límite en esta desigualdad, cuando $n \to \infty$, obtendremos la desigualdad (11), de la cual se deduce la acotación (3).

3) Nos resta demostrar la desigualdad (4). Sea $\widetilde{w}(y)$ una función coincidente o con $\widetilde{u}(y)$ o con $\widetilde{v}(y)$. En concordancia con la definición (8)

$$\|\widetilde{w}(y_1, y_2)\|^2_{W_2^{1/2}[0,l_1]} = \sum_{k=1}^{\infty}\widetilde{w}_k^2(y_2)\frac{k\pi}{l_1}. \qquad (19)$$

Haciendo uso del teorema 2 del § 4 del cap. V, es fácil mostrar que

$$\tilde{w}_k^2 \leqslant \varepsilon_k \int_0^{l_2} \left(\frac{\partial \tilde{w}_k}{\partial y_2}\right)^2 dy_2 + \left(\frac{1}{\varepsilon_k} + \frac{1}{l_2}\right) \int_0^{l_2} \tilde{w}_k^2 (y_2)\, dy_2.$$

Poniendo esta acotación en el segundo miembro de la desigualdad (19) y tomando $\varepsilon_k k\pi/l_1 = \varepsilon$, obtenemos que

$$\| \tilde{w} (y_1, y_2) \|^2_{W_2^{1/2}[0, l_1]} \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{l_2} \left(\frac{\partial \tilde{w}_k}{\partial y_2}\right)^2 dy_2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{l_1}{l_2 k\pi}\right) \left(\frac{k\pi}{l_1}\right)^2 \int_0^{l_2} \tilde{w}_k^2 (y_2)\, dy_2.$$

Pero

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{l_2} \left(\frac{\partial \tilde{w}_k}{\partial y_2}\right) dy_2 = \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial y_2}\right)^2 dy_1 dy_2,$$

además,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{l_1}{l_2 k\pi}\right) \left(\frac{k\pi}{l_1}\right)^2 \int_0^{l_2} \tilde{w}_k^2 (y_2)\, dy_2 \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{l_1}{\pi l_2}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k\pi}{l_1}\right)^2 \int_0^{l_2} \tilde{w}_k^2 (y_2)\, dy_2 = \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{l_1}{\pi l_2}\right) \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \left(\frac{\partial \tilde{w}}{d y_1}\right)^2 dy_1 dy_2.$$

de donde se deduce la desigualdad (4). El teorema queda demostrado por completo.

INDICACIONES BIBLIOGRÁFICAS

Cap. I, § 1. Otros ejemplos o una exposición más detallada de los ejemplos expuestos de problemas de la Física y Mecánica, que conducen a las ecuaciones elípticas, pueden encontrarse en los libros [8], [12].

Cap. I, § 2. Conocimientos más detallados acerca de las ecuaciones elípticas y de sus soluciones generalizadas pueden extraerse de los libros [5] y [10].

Cap. II, §§ 1, 2. Un material de contenido afín con una exposición más detallada de la teoría de esquemas en diferencias homogéneos se contiene en la obra [11].

Cap. II, § 3. La exposición detallada del método de Ritz se puede encontrar en el libro [7]. Los métodos de construcción de los esquemas en diferencias se exponen en los libros [2], [6], [9], [11].

Cap. III. Las aproximaciones en diferencias de la ecuación de Poisson y de las condiciones de frontera para ésta se examinan en los libros [3], [4], [11]. En los mismos libros se aduce también la exposición del principio del máximo.

Cap. V. Otros teoremas de encajamiento y las acotaciones para otros operadores de red pueden encontrarse en las obras [2], [5], [11].

Cap. VI. El método de las desigualdades energéticas, al investigar los esquemas en diferencias se utiliza ampliamente en las obras [2], [5], [11]. En el libro [9] se ejerce la investigación de los esquemas en diferencias de variación.

BIBLIOGRAFÍA

1. *Wasow, Wolfgang R.* and *Forsythe, George E.* Finite-difference method for partial differential equations. N.Y. — Lnd., Wiley, 1963.

2. *Дьяконов Е. Г.*, Разностные методы решения краевых задач, вып. 1 (стационарные задачи), М., Ротапринт ВЦ МГУ, 1971 (*Diákonov E. G.*, Métodos en diferencias de la solución de los problemas de contorno).

3. *Канторович Л. В.*, *Крылов В. И.*, Приближенные методы высшего анализа, М., Физматгиз, 1962 (*Kantoróvich L. V.*, *Krilov V. I.*, Métodos de aproximación del análisis superior).

4. *Collatz, Lothar.* Numerische Behandluhg von Differentialgleichungen. Brl., 1953.

5. *Ладыженская О. А.*, Краевые задачи математической физики, М., «Наука», 1973 (*Ladizhénskaia O. A.*, Problemas de contorno de la física matemática).

6. *Марчук Г. И.*, Методы вычислительной математики, Новосибирск, «Наука», 1973 (*Marchuk G. I.*, Métodos de la matemática de cálculos).

7. *Михлин С. Г.*, Вариационные методы математической физики, М., «Наука», 1969 (*Mijlin S. G.*, Métodos de variación de la física matemática).

8. *Мусхелишвили Н. И.*, Некоторые основные задачи математической теории упругости, М., «Наука», 1966 (*Musjelishvili N. I.*, Algunos problemas fundamentales de la teoría matemática de la elasticidad).

9. *Оганесян Л. А.*, *Ривкинд В. Я.*, *Руховец Л. А.*, Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений, ч. 1 и 2, В сб. «Дифференциальные уравнения и их применение», вып. 5, Вильнюс, Пяргале, 1973; вып. 8, Вильнюс, Пяргале, 1974 (*Oganesián L. A.*, *Rivkind V. Ya.*, *Rujovets L. A.*, Métodos en diferencias de variación de la solución de las ecuaciones elípticas).

10. *Петровский И. Г.*, Лекции об уравнениях с частными производными, М., Физматгиз, 1961 (*Petrovski I. G.*, Lecciones sobre las ecuaciones con derivadas parciales).

11. *Самарский А. А.*, Введение в теорию разностных схем, М., «Наука», 1971 (*Samarski A. A.*, Introducción a la teoría de los esquemas en diferencias).

12. *Тихонов А. Н.*, *Самарский А. А.*, Уравнения математической физики, М., «Наука», 1972 (*Tijonov A. N.*, *Samarski A. A.*, Ecuaciones de la física matemática).

A NUESTROS LECTORES:

«Mir» edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia ficción. Dirijan sus opiniones a la Editorial «Mir», 1 Rizhski per., 2, 129820, Moscú, I—110, GSP, URSS.

Para todos aquellos que desean ampliar sus conocimientos elementales en Matemáticas y para aquellos que se preparan para el estudio de las Matemáticas Superiores serán útiles las obras de la serie "Lecciones populares de Matemáticas".

En 1980 saldrán a la luz las siguientes denominaciones de esta serie:

Argunov B., Skorniakov L.
Teoremas de configuración

Beskin N.
División del segmento en la razón dada

Fetísov A.
Sobre la demostración en la geometría

Kostovski A.
Construcciones geométricas mediante un sólo compás

Solodóvnikov A.
Sistemas de desigualdades lineales

Vorobiov N.
Números de Fibonacci

El mejor medio de profundizar sus conocimientos en Matemáticas es resolver los problemas del tema correspondiente.

La editorial "MIR" propone a los lectores las siguientes recopilaciones de problemas:

Faddiéev D., Sominski I.

PROBLEMAS DE ALGEBRA SUPERIOR

En la primera parte del libro se exponen 980 problemas de álgebra superior, comprendidos en los 7 capítulos siguientes: números complejos, determinantes, sistemas de ecuaciones lineales, matrices, polinomios y funciones racionales de una variable, funciones simétricas y álgebra lineal. En la segunda parte se dan algunas indicaciones breves para resolver los problemas más difíciles.

La tercera parte está dedicada a las respuestas; en algunos casos se da el método de solución. La aparición de este libro es fruto de la experiencia adquirida en las clases impartidas por los autores en la Universidad Estatal de Leningrado y en el Instituto Pedagógico Herzen.

En 1975 nuestra Editorial publicó la versión española del libro del profesor A. Kurosch «Curso de álgebra superior». A pesar de que la presente obra fue hecha independientemente del libro del citado autor, al resolver los problemas conviene consultar la teoría correspondiente en el citado libro.

Gavrilov G., Sapozhenco A.

COLECCION DE PROBLEMAS DE MATEMATICA DISCRETA

Este libro fue escrito con el fin de obtener un manual para las clases de ejercicios prácticos de la asignatura «Matemática discreta». Contiene problemas dedicados al estudio inicial de los conceptos básicos y de las principales definiciones de la matemática discreta. A la par de esto, también se encuentran en él problemas más difíciles, calculados para un lector que tenga suficiente cultura matemática y una preparación especial en este terreno. Contiene ocho capítulos en los que se ilustran los temas siguientes: funciones de Boole; formas de expresión de estas funciones y sus propiedades, clases cerradas y plenitud; lógicas de K valores; grafos y redes; elementos de la teoría de la codificación; autómatas finitos; elementos de la teoría de los algoritmos; elementos de la combinatoria.

Cada párrafo de cada capítulo comienza haciendo una exposición con las principales definiciones y las explicaciones generales del tema tratado. Después se propone una serie de problemas. Al final del libro para muchos de los problemas propuestos se dan los resultados y algunas indicaciones metódicas sobre su resolución.